北京大学数学丛书

同伦论基础

廖山涛　刘旺金　著

北京大学出版社

同伦论基础

廖山涛　　刘旺金著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书是代数拓扑中同伦论的基础。全书共分六章。包括：同伦羣，同伦羣的若干性质，阻碍类理论，纖维空间，谱叙列在纖维空间的应用。本书适于高等学校拓扑，几何等专业的师生、研究生，从事网络理论、近代物理等研究工作人员阅读、参考。

同 伦 论 基 础

北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米32开本9印张 215000字
1980年12月第一版 1980年12月第一次印刷
印数：10000册

统一书号：13209·2 平装定价：1,35元

序　言

代数拓扑是拓扑学的重要分支．它的特征是借助于一系列的代数的对象、方法，如群、环、同态等，进行研究拓扑空间在连续形变下的不变性质．

同调论、同伦论都是代数拓扑的基础．它们自本世纪形成以来（同伦论形成较晚），在数学各分支中的作用早已呈现出来，不仅表现在与微分方程、泛函分析、代数、微分几何、大范围分析等联系密切，甚至像电路网络、衍架分析等学科中也找到它们的应用．

这书基本上是一本教材．作者廖山涛于六十年代曾在北京大学多次讲授"同伦论"一课，本书的基本内容就是根据课程(1961—1962学年)的讲稿由作者刘旺金补充整理而成的．十几年来，代数拓扑的发展甚为迅速，内容和方法已有不少更新．然而，我们认为，本书的内容一方面可供初次接触过代数拓扑的或不准备专门研究同伦论的读者阅读；同时，也可以作学习更深一步的现代同伦论的阶梯，因此仍不失为同伦论的一个初步介绍．它对于阅读过江泽涵教授所著"拓扑学引论"一书的读者，当不会有多大的困难．

同伦论之所以得以兴旺发展，首先应归功于 W. Hurewicz 1935 年引进同伦群．稍迟，S. Eilenberg 用同伦群引进关于映射扩充的阻碍类．多少年来，同伦论实质上始终沿着同伦群及阻碍类的有效计算问题，及由此产生的同伦不变量的内在联系，以及它们的进一步引伸和应用等，而进行工作，尽管表面上看来有时不甚明显．这大部份因为，为了解决老的问题而产生新的理论和

工具，而这些新的理论和工具本身既饶有意义又有待于进一步研究。

正因为这原故，本书作为一介绍性读本，就直截了当地尽快先介绍同伦群和阻碍类。这办法是遵循历史上自然发展过程的，或者说是传统的。为了解决同伦论如上述的早期注意的问题所产生的理论和工具中，对后来最有广泛影响的，无疑地要推 J.-P. Serre 应用 J. Leray 谱理论于纤维空间来计算同伦群。因此，紧接着阻碍类论之后，我们介绍了纤维空间和谱叙列，进而择要介绍Serre 的工作。

在1961—1962学年我们进行同伦论课程时，已有内容相当丰富的、胡世桢写的“*Homotopy Theory*”，我们曾经借鉴过。后来在国内受到注意的又有E.H.Spanier著的“*Algebraic Topology*”及 R. M. Switzer 著的“*Algebraic Topology—homotopy and homology*”两本关于同伦论的书，内容尤其丰富。前者几乎一切从函子观点出发，不同于我们直截引进的办法；后者总结一部份重要而深刻的新成果，写得十分浓缩。这些书实际上都很难在一学年这样短的课程内全部介绍完，除非听众已有良好的基础。本书则要求在较短的时间内介绍同伦论这数学分支的要旨。这些年来，这分支内容虽已大大增添，然而要旨未变，这就是本书仍不失为同伦论的一个适宜的初步介绍的原因。

本书共分六章，每章之前都有内容提要。在提要和正文中还经常提到有关材料来源的文献。提到这些文献的目的仅仅是要引导读者习惯于查看图书资料，但决不能草率地认为这就是在表明同伦论历史上的重要进展过程。细心的读者当会逐渐明白，有的同伦论科研工作在当时受到主要的注意，后来又产生大的影响，但在本书中甚至还没有涉及到。考虑到教学的需要，本书在每章末选择了部份练习题。如果由于课程较紧或为非拓扑专业开设时，可删去第五、六章的内容。

本书的叙述、安排及内容肯定会有许多不妥之处，恳切盼望

数学界的专家及各位读者提出宝贵意见。

最后，说明书中采用的记号。如“ ▮ ”表示一个定理、命题或推论的证明完毕，或证明显明，或此处不给出证明。“定理1.5”表示同一章中的1.5定理，而“定理Ⅱ.1.2”或“定理B.1.2”则分别表示第二章或附录B中的1.2定理。正文中简单而类似的推理有时省去，留给读者自己补出，在省去的地方往往紧接着在一括号内写有“复习题”字样。书末附有参考书目及部分文献目录、索引等。

廖山涛（北京大学）

刘旺金（四川师范学院）

1980年2月

说　明

此丛书是以数学、計算数学、应用数学、概率统計及有关各专业的高年级、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期三学时研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，也为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

目　　录

第一章　同　伦　群

第二章　同伦群的若干性质

第三章　阻碍类理论

第四章　纤　维　空　间

第五章　谱叙列的代数理论

第六章　谱叙列在纤维空间的应用

第一章 同 伦 群

〔内容提要〕

拓扑空间是最基本的拓扑概念，群是基本的代数概念。本章对任意正整数 n，当给定拓扑空间X的某一基点$x_0 \in X$时联系一群$\pi_n(X,x_0)$，称为X在x_0处的第 n 个同伦群（§ 2，§ 3）。同伦群最初是1935年W. Hurewicz 引入并加以讨论的〔23〕；当$n=1$时，即是早期由H. Poincaré 提出的基本群。基点的改变对同伦群的影响在§ 4 中得到论证，从而说明，路径连通空间X在任一基点的同伦群是同构的。对于拓扑空间偶(X,A)，当$n \geqslant 2$，相应地有相对同伦群$\pi_n(X,A,x_0)$的概念（§ 5）。并于§ 6 证明，同伦群(相对同伦群)是空间（空间偶）的伦型不变量。

与同调论类似，拓扑空间X及其子空间A，由同论群$\pi_n(X,x_0)$，$\pi_n(A,x_0)$，$\pi_n(X,A,x_0)$等组成的正合叙列在同伦论中是重要的，§ 7 中将作叙述。

§ 1 中关于映射的同伦、空间的伦型等概念是本章及全书必需的预备知识。

§1 预备

设X与Y是拓扑空间，连续函数 $f:X\to Y$以后称为映射。设X'与X''是X的子空间，Y'与Y''是Y的子空间，如果映射$f:X\to Y$适合$f(X')\subseteq Y'$，$f(X'')\subseteq Y''$，则记$f:(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'')$。

以后，I 总表示实直线上的闭线节〔0,1〕。

定义1.1 设f与$f':(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'')$是两个映射。如果存在映射$F:(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Y,Y',Y'')$，

使 $F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=f'(x)$ 对任意 $x\in X$ 成立，则称 f 与 f' 相对于 (X',X'')，(Y',Y'') 来说是同伦的，并记作

$$f\simeq f':(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'').$$

在不产生误解的情况下，简记 $f\simeq f'$。

此时映射 F 称为从 f 到 f' 的**同伦**或伦移，记为 $F:f\simeq f'$。

附记1. 当 X',X'',Y',Y'' 都是空集时，即通常所指的（绝对）同伦，记为 $f\simeq f':X\to Y$。

当 $X''=X'$，$Y''=Y'$ 时，记为 $f\simeq f':(X,X')\to(Y,Y')$。特别地，伦移 F 在子集 X' 上保持不动，即适合 $F(x,t)=f(x)$，对任意 $x\in X'$，$t\in I$，则记 $f\simeq f'\operatorname{rel}X'$。

附记2. 映射 f 与 f' 同伦有明显的几何直观，即连接 f 至 f' 有一连续形变。事实上，对于 $(x,t)\in X\times I$，我们可以把 t 理解为时间，则 $f_t(x)=F(x,t)$ 定义了一族映射 $f_t:X\to Y$。对于 $t\in I$，$f_t(X)$ 表示在时刻 t，X 在 Y 中的像。特别地，$t=0$ 时为映射 f，$t=1$ 时为映射 f'；而 $f_t(x)$ 同时连续地依赖于点 $x\in X$ 及时间 $t\in I$。这种表示同伦的方法今后常用。

注意，定义 1.1 要求对任意 $t\in I$，$f_t(X')\subseteq Y'$，$f_t(X'')\subseteq Y''$。

下面是映射（绝对）同伦的例子：

例1.1 设 $X=Y=E^n$（n 维欧氏空间）。记 $i:E^n\to E^n$ 是恒同映射；$c:E^n\to E^n$ 是常值映射，对任意 $x\in E^n$，$c(x)=0$，则 $i\simeq c$。因为由 $F(x,t)=(1-t)x$ 定义的映射 $F:E^n\times I\to E^n$，使 $F:i\simeq c$。几何上，映射 F 即是将 E^n 缩成为一点0。

例1.2 设 X 是任意拓扑空间，Y 是 E^n 的凸子集。对于映射 f 与 $f':X\to Y$，命 $F(x,t)=(1-t)f(x)+tf'(x)$，则 $F:X\times I\to Y$ 是连接 f 到 f' 的同伦。

例1.3 拓扑空间 Y 中连接点 y_0 至 y_1 的**路径**是一映射 $f:(I,(0),(1))\to(Y,y_0,y_1)$。$Y$ 中可用路径来连接的点偶

给出点偶间等价关系，因而Y分成一些**路径连通分支**，使得点y_0及y_1属于同一分支，当且仅当有路径连y_0至y_1。若Y只包含这样的一个分支，则称Y是**路径连通的**。

取$X=\{x_0\}$是由一点构成的拓扑空间，则拓扑空间Y是路径连通的，当且仅当任意两个映射f与$f':\{x_0\}\to Y$都是同伦的(显然)。

记Y^X是从拓扑空间X到拓扑空间Y的一切映射的集合，X',X'',Y',Y''如前。

命$(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}=\{f\in Y^X|f(X')\subseteq Y',\ f(X'')\subseteq Y''\}$为$Y^X$的子集。自然，当$X',X'',Y',Y''$都是空集时，即为$Y^X$自身。

命题1.1　在集合$(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}$中，映射的同伦关系"$\simeq$"是等价关系，即对任意$f,f',f''\in(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}$，有

(1) $f\simeq f$；

(2) 如果$f\simeq f'$，则$f'\simeq f$；

(3) 如果$f\simeq f'$，$f'\simeq f''$，则$f\simeq f''$。

证明　(1) 命$F(x,t)=f(x)$，易见F是f到自身的同伦；

(2) 假设F是连接f至f'的同伦。易见，由$F'(x,t)=F(x,1-t)$给出的映射F'是连接f'至f的同伦；

(3) 假设$F_1:f\simeq f'$，$F_2:f'\simeq f''$，即映射F_1与F_2：$(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Y,Y',Y'')$，使得$F_1(x,0)=f(x)$，$F_1(x,1)=f'(x)=F_2(x,0)$，$F_2(x,1)=f''(x)$，其中$x\in X$。

命

$$F(x,t)=\begin{cases}F_1(x,2t), & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ F_2(x,2t-1), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

知$F:(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Y,Y',Y'')$，使得$F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=f''(x)$，其中$x\in X$（见图1.1）．而$F$的连续性由下面的粘接引理即可得到，故$F:f\simeq f''$。】

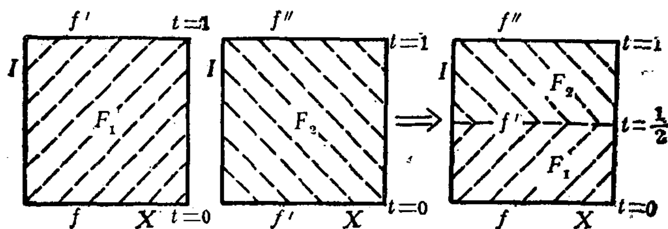


图 1.1

设X与Y是拓扑空间．X'为X的子空间，$g:X\to Y$为映射，记$g|X':X'\to Y$为g限制在X'上所得的部份映射．设$X=X_1\cup X_2$，映射$f_i:X_i\to Y$，$i=1,2$，适合$f_1|X_1\cap X_2=f_2|X_1\cap X_2$。于是可定义单值对应$f:X\to Y$，使得

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in X_1,\\ f_2(x), & x\in X_2.\end{cases}$$

引理1.2（粘接引理） 设X_1与X_2是X的闭子集，则上述对应f是一个映射。

证明 设M是Y的任意闭子集，有

$$f^{-1}(M)=f^{-1}(M)\cap(X_1\cup X_2)=[f^{-1}(M)\cap X_1]\cup[f^{-1}(M)\cap X_2]=f_1^{-1}(M)\cup f_2^{-1}(M).$$

根据f_1的连续性及X_1是X的闭子集，$f_1^{-1}(M)$在X_1中，因而在X中是闭集．同理$f_2^{-1}(M)$是X的闭集，故$f^{-1}(M)$在X中亦为闭集。】

推论1.3 设X,Y,X_1,X_2如引理1.2。又设对映映f与f'：$X\to Y$，有同伦$F_1:f|X_1\simeq f'|X_1,F_2:f|X_2\simeq f'|X_2$，且适合$F_1|(X_1\cap X_2)\times I=F_2|(X_1\cap X_2)\times I$。则由式

$$F(x,t)=\begin{cases}F_1(x,t), & x\in X_1,\ t\in I,\\ F_2(x,t), & x\in X_2,\ t\in I\end{cases}$$

给出的映射$F:X\times I\to Y$是连接f到f'的同伦。(复习题)】

命题1.1表明，集合$(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}$(特别地Y^X)按映射的同伦关系分成一些互不相交的等价类，其中每一类称为一个同伦类。

从例1.2看出，当Y是E^n凸集时，Y^X仅有一个同伦类。

命题1.4　设X,Y,Z是拓扑空间，X',X'',Y',Y''如前所述，Z'与Z''是Z的子空间。如果$f\simeq f':(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'')$，$g\simeq g':(Y,Y',Y'')\to(Z,Z',Z'')$，则合成映射亦然，即$g\cdot f\simeq g'\cdot f':(X,X',X'')\to(Z,Z',Z'')$。

证明　由命题1.1中的(3)，只须注意下述两点：

(1) 如$F:f\simeq f'$，则$G=g\cdot F:g\cdot f\simeq g\cdot f'$；

(2) 如$H:g\simeq g'$，则由$K(x,t)=H(f'(x),t)$给出连接$g\cdot f'$至$g'\cdot f'$的同伦$K:(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Z,Z',Z'')$。】

命题表明，在合成映射中如果把其中的因子换成与之同伦的映射，其结果与原来的合成映射同伦。

定义1.2　拓扑空间X与Y称为**同伦等价的**(**具有相同伦型**)，如果存在映射$f:X\to Y$，及$g:Y\to X$，使得$g\cdot f\simeq 1_X:X\to X$，$f\cdot g\simeq 1_Y:Y\to Y$，这里$1_X$与$1_Y$分别表示$X$与$Y$上的恒同映射。

此时f称为从X到Y的一个同伦等价(映射)，g称为f的一个**同伦逆**(映射)，并记$f:X\simeq Y$，或简记$X\simeq Y$。

定理1.5　在全体拓扑空间这一集合中，同伦等价是一等价关系。

证明　由定义1.2，反身性、对称性明显。现在证明传递性。设$f:X\simeq Y$，$h:Y\simeq Z$，而$g:Y\to X$，$k:Z\to Y$分别是f与h的同伦逆。根据命题1.4，知

$$(gk)(hf)\simeq g1_Y f=gf\simeq 1_X: X\to X,$$
$$(hf)(gk)\simeq h1_X k=hk\simeq 1_Z: Z\to Z.$$

故 $hf: X\simeq Z$. 】

定理告诉我们，拓扑空间按同伦等价关系分成许多等价类。易见，同胚的空间具有相同的伦型；反之，具有相同伦型的空间不一定是同胚的。例如$X=E^n$，$Y=\{y_0\}$就是如此。（复习题）

现今代数拓扑中的许多内容都是讨论空间的**伦型不变性**，即具有相同伦型的空间的共同性质，比如多面体的同调群、上调环以及本章将讨论的同伦群等。

定义1.3 拓扑空间X称为**可缩**的，如果恒同映射$1_X: X\to X$同伦于某一个常值映射，即对某 $x_0\in X$，$c(X)=x_0$，有$1_X\simeq c$。此时亦称 1_X 零伦。

命题1.6 拓扑空间X是可缩的，当且仅当X与由一点组成的空间同伦型。

证明 设X是可缩的，有 $1_X\simeq c: X\to X$。记$f=c: X\to\{x_0\}$，$g:\{x_0\}\to X$，使得 $g(x_0)=x_0\in X$。则 $gf=c\simeq 1_X$，$fg=1_{\{x_0\}}$，故X与$\{x_0\}$同伦型。

反之，如X与$\{y_0\}$同伦型，有映射 $f: X\to\{y_0\}$，$g:\{y_0\}\to X$，使 $gf\simeq 1_X$，$fg\simeq 1_{\{y_0\}}$。记 $x_0=g(y_0)$，$c: x\to\{x_0\}$是常值映射，则 $c=gf\simeq 1_X$。按定义1.3，X是可缩的。

命题说明，在伦型的意义下，可缩空间是最简单的拓扑空间。例如 E^n 等。

§2 同伦群

设X是拓扑空间。

$I^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in E^n|\,0\leqslant t_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$ 是n维方体，$n\geqslant 1$。特别地 $I^1=I$。①

① 我们认为，当 $n<m$，E^n是 E^m 的子空间，其中的点，后$(n-m)$个坐标值为零。

定义2.1　设映射 f 与 $g:I^n\to X$，适合 $f(1,t_2,\cdots,t_n)=g(0,t_2,\cdots,t_n)$。则由式

$$h(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}f(2t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2},\\ g(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1\end{cases}$$

给出映射 $h:I^n\to X$（根据引理1.2），记作 $h=f+g$（见图2.1）。

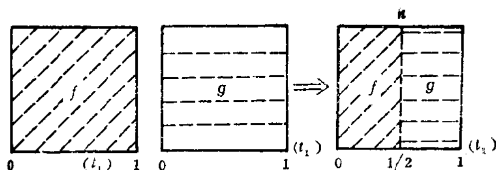


图　2.1

以下取定 $x_0\in X$，称为基点。

$\partial I^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in I^n|\prod_{i=1}^{n}t_i(1-t_i)=0\}$是 I^n 的边界点集。

记 $M_n(X,x_0)=\{f\in X^{I^n}|f:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)\}$。

命 $\pi_n(X,x_0)$ 表示 $M_n(X,x_0)$ 中就映射的同伦关系 $f\simeq g:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$所分成的同伦类的集合。我们在 $\pi_n(X,x_0)$ 中引入运算“+”。

定义2.2　设 $\alpha=[f]$，$\beta=[g]\in\pi_n(X,x_0)$，其中 f 与 $g:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$ 是 α 与 β 的代表映射。命$\alpha+\beta=[f+g]\in\pi_n(X,x_0)$，则“+”是 $\pi_n(X,x_0)$中的代数运算。

事实上，由于 f 与 $g\in M_n(X,x_0)$，易知 $f+g\in M_n(X,x_0)$。根据推论1.3，$\alpha+\beta$的定义与 α，β的代表映射 f，g 的选取无关。（复习题）

定理2.1 $\pi_n(X,x_0)$就定义 2.2 中的运算"+"组成一个群，称为以x_0为基点X的第n个同伦群（或称n维同伦群）.

证明 验证：

（1）结合律的成立. 设$f, g, h\in M_n(X, x_0)$，则映射$p=(f+g)+h$，$q=f+(g+h)$分别由下式定义：

$$p(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases} f(4t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{4}, \\ g(4t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{4}\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2}, \\ h(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1; \end{cases}$$

$$q(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2}, \\ g(4t_1-2,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant\frac{3}{4}, \\ h(4t_1-3,t_2,\cdots,t_n), & \frac{3}{4}\leqslant t_1\leqslant 1 \end{cases}$$

（见图2.2）.

记$l:I\to I$为映射，使

$$l(t)=\begin{cases} 2t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}, \\ t+\frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(t+1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

知l将$\left[0,\frac{1}{4}\right]$，$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，$\left[\frac{1}{2},1\right]$分别线性变换至$\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$，$\left[\frac{3}{4},1\right]$上，且$l\simeq 1_I:(I,\partial I)\to(I,\partial I)$（见图2.3）.

命$r:I^n\to I^n$为映射，使得$r(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(l(t_1),t_2,\cdots,t_n)$. 知$r\simeq 1_{I^n}:(I^n,\partial I^n)\to(I^n,\partial I^n)$. 于是$p=qr\simeq q:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$

（命题1.4）。

这就证明了结合律：

$([f]+[g])+[h]=[f]+([g]+[h])$.

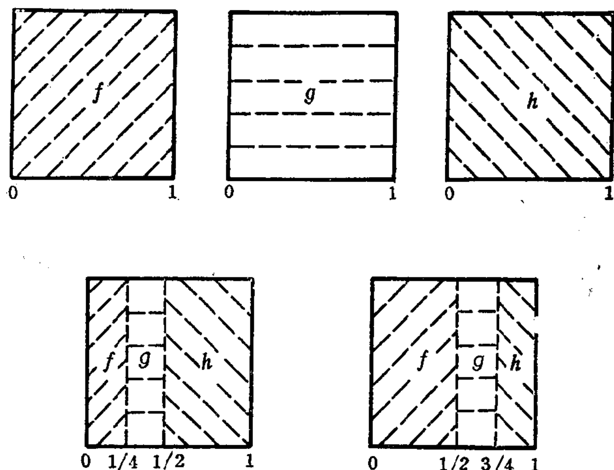


图 2.2

（2）右零元的存在．记

$\iota=[c]\in\pi_n(X,x_0)$,

其中 $c:I^n\to X, c(I^n)=x_0$. 对任意 $[f]\in\pi_n(X,x_0)$，命 $F:(I^n\times I,\ \partial I^n\times I)\to(X,x_0)$ 为下式

$F(t_1,t_2,\cdots,t_n,t)=(f+c)\left(\left(1-\frac{t}{2}\right)t_1,t_2,\ \cdots,\ t_n\right)$

给出的映射（见图2.4）。易知 $F|I^n\times(0)=f+c$，及 $F|I^n\times(1)=f$. 故 $[f]+[c]$

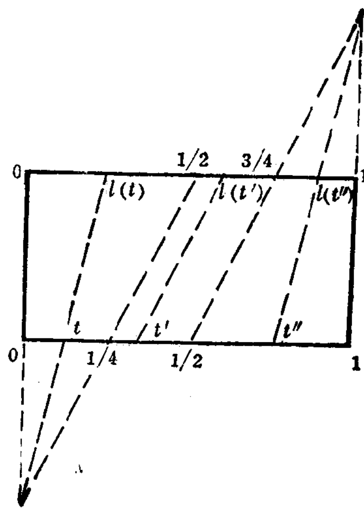


图 2.3

$=[f]$，即 ι 是右零元。

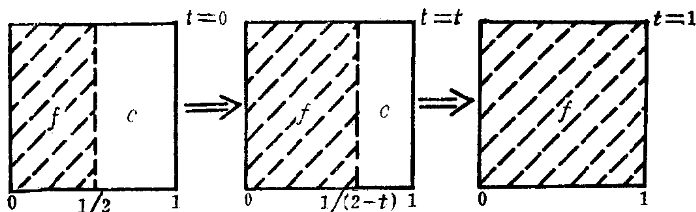


图 2.4

（3）右负元的存在。对于$[f]\in\pi_n(X,x_0)$，记$\bar{f}:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$是由式$\bar{f}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=f(1-t_1,t_2,\cdots,t_n)$给出的映射，则

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n,t)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2}(1-t), \\ f(1-t,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1-t}{2}\leqslant t_1\leqslant\frac{1+t}{2} \\ \bar{f}(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}(1+t)\leqslant t_1\leqslant 1 \end{cases}$$

给出连接$f+\bar{f}$至c的相对于∂I^n的同伦，其中c是（2）中的常值映射(见图2.5)。

故$[f]+[\bar{f}]=\iota$，即$[\bar{f}]$是$[f]$的右负元。∎

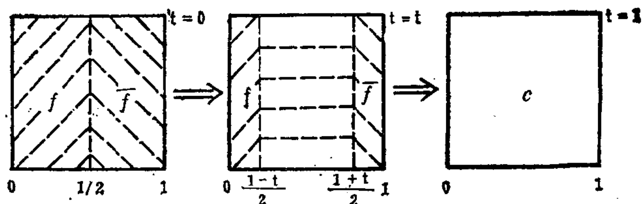


图 2.5

为了应用的方便，我们对 $\pi_n(X,x_0)$ 中元素 α 的代表映射作一些讨论。

记 $$I_1^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in I^n \mid t_1\leqslant\frac{1}{2}\},$$

$$I_2^n=\{(t_1,t_2,\cdots t_n)\in I^n \mid t_1\geqslant\frac{1}{2}\}.$$

命题2.2 对任意 $\alpha\in\pi_n(X,x_0)$，总存在 f' 与 $f''\in\alpha$，使得 $f'(I_2^n)=x_0=f''(I_1^n)$。

证明 设 $\alpha=[f]$，命 $f'=f+c$，$f''=c+f$。由定义2.1易见 $f'(I_2^n)=x_0=f''(I_1^n)$。根据定理2.1的证明，$f'\simeq f\simeq f'':(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$，故 $f',f''\in\alpha$。▌

命题中的映射 f' 与 f'' 分别称为聚集在 I_1^n 与 I_2^n 上 α 的代表映射。

命题2.3 设 $\alpha=[f']$，$\beta=[g'']\in\pi_n(X,x_0)$，其中 $f'(I_2^n)=x_0=g''(I_1^n)$．命 $h:(I_2^n,\ \partial I^n)\to(X,x_0)$ 是由式

$$h(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}f'(t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2},\\ g''(t_1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1\end{cases}$$

给出的映射。则 $[h]=\alpha+\beta$。

证明 命 $F:(I^n\times I,\partial I^n\times I)\to(X,x_0)$ 为映射，使得

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n,t)=\begin{cases}f'((1+t)t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2},\\ g''((1+t)t_1-t,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1.\end{cases}$$

则 F 是连接 h 到 $f'+g''$ 的同伦（见图2.6）。▌

附记 同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 中的运算用加号"+"．这是因为当 $n\geqslant 2$，$\pi_n(X,x_0)$ 总是交换群（见定理3.4）；而当 $n=1$，$\pi_1(X,x_0)$ 称为 X 在基点 x_0 处的基本群，它一般不是交换群

(见练习题18)，因之运算也常用乘号“·”。如沿用“+”，则须注意运算的次序。

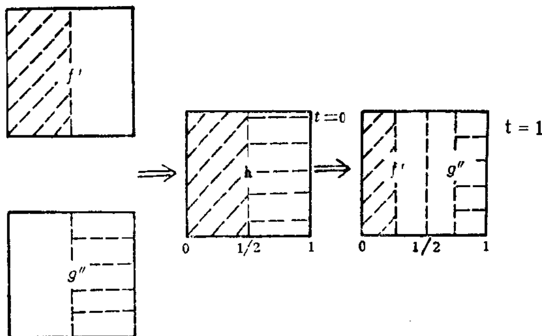


图 2.6

§3　同伦群的交替描述

关于同伦群流行的定义中一般有两种说法：一种是用方体I^n上的映射；另一种用n维球S^n取代I^n。后一种有时带来方便。为直接给出这样一个交替描述，只须应用适当的映射$\varphi_n:I^n\to S^n$，方式如下：(可参考G. W. Whitehead [29]。)

记 $\nabla^{n+1}=\{(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})\in E^{n+1}\mid\sum_i t_i^2\leqslant 1\}$为$(n+1)$维(实心)球体，$n\geqslant 0$；

$S^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})\in\nabla^{n+1}\mid\sum_i t_i^2=1\}$为$n$维球，即$\nabla^{n+1}$的边界点集；$p_0=(1,0,\cdots,0)\in S^n$为其基点；

$S_+^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})\in S^n|t_{n+1}\geqslant 0\}$为$S^n$的“北半球”；

$S_-^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})\in S^n|t_{n+1}\leqslant 0\}$为$S^n$的“南半球”。

易见$S^n=S_+^n\cup S_-^n$，$S^{n-1}=S_+^n\cap S_-^n$。

命题3.1　存在映射$\varphi_n:(I^n,\partial I^n)\to(S^n,p_0)$，$n\geqslant 1$，使

（1） φ_n 将 $I^n-\partial I^n$ 同胚映射至 $S^n-(p_0)$ 上；

（2） $\varphi_n(I_1^n)=S_+^n$，$\varphi_n(I_2^n)=S_-^n$，I_1^n 与 I_2^n 见 § 2.

证明 首先，对 $n\geqslant 1$，命 $d_n:S^{n-1}\times[-1,1]\to S^n$ 为映射，使得

$$d_n(u,t)=\begin{cases}\{t+(1-t)t_1,(1-t)t_2,\cdots,(1-t)t_n,\\ \qquad\sqrt{2t(1-t)(1-t_1)},\}, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \{-t+(1+t)t_1,(1+t)t_2,\cdots,(1+t)t_n,\\ \qquad-\sqrt{-2t(1+t)(1-t_1)}\}, & -1\leqslant t\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $u=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in S^{n-1}$.

几何上，对 $u\in S^{n-1}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$d_n(u,t)$是 S_+^n上这样的点，它在“赤道平面”$t_{n+1}=0$的正投影象点恰分 u 至 p_0 的线节为 $t:(1-t)$；当$-1\leqslant t\leqslant 0$, $d_n(u,t)$是 $d_n(u,-t)$对 $t_{n+1}=0$的反射象点（见图3.1）.

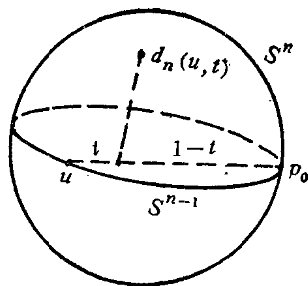


图 3.1

其次，记$\bar d_n:S^{n-1}\times I\to S^n$为映射，使得$\bar d_n(u,t)=d_n(u,l(t))$，$u\in S^{n-1}$，及 $l:I\to[-1,1]$ 是使 $l(0)=1$，$l(1)=-1$ 的线性同胚映射. 易见，$\bar d_n$具有性质：

i） $\bar d_n$ 同胚地映$(S^{n-1}-(p_0))\times\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$至 $S_+^n-(p_0)$上，同胚地映 $(S^{n-1}-(p_0))\times\left[\dfrac{1}{2},1\right)$至 $S_-^n-(p_0)$上，$\bar d_n\left(u,\dfrac{1}{2}\right)=u$，$u\in S^{n-1}$；

ii） $\bar d_n$映$(S^{n-1}\times(0))\cup(S^{n-1}\times(1)\cup((p_0)\times I)$至$p_0$.

现在用归纳法定义 φ_n 如下：当$n=1$，命

$$\varphi_1(t)=\bar{d}_1(-1,\ t)=\begin{cases}\{2l(t)-1,\ 2\sqrt{l(t)(1-l(t))}\}, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \{-2l(t)-1,-2\sqrt{-l(t)(1+l(t))}\}, & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

当 $n>1$，命

$$\varphi_n(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\bar{d}_n(\varphi_{n-1}(t_2,t_3,\cdots t_n),t_1),$$

$$(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in I^n.$$

容易验证，映射 φ_n 适合命题的要求。】

以下简记 φ_n 为 φ。

命 $M_n^{\#}(X,x_0)=\{f^{\#}\in X^{S^n}|f^{\#}:(S^n,p_0)\to(X,x_0)\}$。$\pi_n^{\#}(X,x_0)$ 表示 $M_n^{\#}(X,x_0)$ 中就映射的同伦关系 $f^{\#}\simeq g^{\#}:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$ 所分成的同伦类的集合。

命题3.2 设 $\Phi:M_n^{\#}(X,x_0)\to M_n(X,x_0)$ 为单值对应，使得对于 $f^{\#}\in M_n^{\#}(X,x_0)$，$\Phi(f^{\#})=f^{\#}\varphi\in M_n(X,x_0)$，则 Φ 是一一对应，且导出一一对应 $\Phi_*:\pi_n^{\#}(X,x_0)\to\pi_n(X,x_0)$。

证明 首先，设 $f^{\#}\in M_n^{\#}(X,x_0)$，记 $f=\Phi(f^{\#})=f^{\#}\varphi$。

（1）Φ的在上性。对任意 $f\in M_n(X,x_0)$，则由

$$f^{\#}(u)=\begin{cases}f\varphi^{-1}(u), & u\in S^n-(p_0),\\ x_0, & u=p_0\end{cases}$$

给出映射 $f^{\#}:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，使得 $f^{\#}\varphi=f$。$f^{\#}$ 的连续性是因为，对任意X的闭子集M，${f^{\#}}^{-1}(M)=\varphi f^{-1}(M)$；而 $f^{-1}(M)$ 在 I^n 中是闭集，即为紧致集。故 $\varphi f^{-1}(M)$ 在 S^n 中是紧致集，因之亦为闭集。

（2）Φ 的一一对应性。设 $f^{\#}\varphi=f=g^{\#}\varphi:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$，$f^{\#}$ 与 $g^{\#}\in M_n^{\#}(X,x_0)$。当 $u\in S^n-(p_0)$，由 φ 的同胚性，有 $v=\varphi^{-1}(u)\in I^n-\partial I^n$，知 $f^{\#}(u)=f(\varphi^{-1}(u))=g^{\#}(u)$。而

$$f^{\#}(p_0)=g^{\#}(p_0)=x_0,$$

故 $f^{\#}=g^{\#}$. 总之，$f^{\#}\to f=f^{\#}\varphi$ 是一一对应.

其次，设 $f^{\#}$ 与 $g^{\#}\in M_n^{\#}(X,x_0)$，$f=f^{\#}\varphi$，$g=g^{\#}\varphi$.

（3）如 $f^{\#}\simeq g^{\#}:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，用命题1.4，显然有 $f\simeq g:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$.

（4）如 $f\simeq g:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$ 及 $f_t:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$，$t\in I$，是连接 f 至 g 的同伦，则由式

$$f_t^{\#}(u)=\begin{cases}f_*(\varphi^{-1}(u)), & u\in S^n-(p_0),\\ x_0, & u=p_0,\ t\in I\end{cases}$$

给出映射族 $f_t^{\#}:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，是连接 $f^{\#}$ 到 $g^{\#}$ 的同伦. 它对 (u,t) 的连续性证法同（1）.

从（3）与（4）可见，Φ 导出一一对应:

$\Phi_*:\pi_n^{\#}(X,x_0)\to\pi_n(X,x_0)$，使得 $\Phi_*[f^{\#}]=[f^{\#}\varphi]$. ▌

按 Φ 的定义: $f^{\#}\to f=f^{\#}\varphi$，显然知

$f(I_2^n)=x_0$，当且仅当 $f^{\#}(S_-^n)=x_0$;

$f(I_1^n)=x_0$，当且仅当 $f^{\#}(S_+^n)=x_0$.

定义3.1 设 $[f^{\#}]$ 与 $[g^{\#}]\in\pi_n^{\#}(X,x_0)$，且 $f^{\#}(S_-^n)=x_0=g^{\#}(S_+^n)$. 命

$$h^{\#}(u)=\begin{cases}f^{\#}(u), & u\in S_+^n,\\ g^{\#}(u), & u\in S_-^n.\end{cases}$$

则 $h^{\#}\in M_n^{\#}(X,x_0)$，记 $h^{\#}=f^{\#}+g^{\#}$. 定义

$$[f^{\#}]+[g^{\#}]=[h^{\#}]\in\pi_n^{\#}(X,x_0).$$

根据命题2.2，对任意 $\alpha^{\#}$ 与 $\beta^{\#}\in\pi_n^{\#}(X,x_0)$，如此的代表映射 $f^{\#}$ 与 $g^{\#}$ 是存在的. 进一步有

定理3.3 $\pi_n^{\#}(X,x_0)$ 就上述运算"+"组成的一个群，且 $\Phi_*:\pi_n^{\#}(X,x_0)\approx\pi_n(X,x_0)$.

证明 根据命题3.2及定理2.1，只须指出:

设 $\alpha^{\#}=[f^{\#}],\beta^{\#}=[g^{\#}]\in\pi_n^{\#}(X,x_0)$，$f^{\#}(S_-^n)=x_0=g^{\#}(S_+^n)$.

由命题2.3，有 $\Phi_*(\alpha^\#+\beta^\#)=\Phi_*[h^\#]=[h^\#\varphi]=[f^\#\varphi]+[g^\#\varphi]=\Phi_*(\alpha^\#)+\Phi_*(\beta^\#)$。】

以后 $\pi_n^\#(X,x_0)$ 仍记作 $\pi_n(X,x_0)$。

附记 同构 Φ_* 是由映射 $\varphi:(I^n,\partial I^n)\to(S^n,p_0)$ 导出的，那么 Φ_* 与 φ 的选取关系如何？

设映射 $\varphi':(I^n,\partial I^n)\to(S^n,p_0)$ 适合命题3.1中 φ 的性质（1），易知 φ' 亦导出一一对应 $\Phi'_*:\pi_n^\#(X,x_0)\to\pi_n(X,x_0)$，$n\geqslant1$。

如果 $\varphi'\simeq\varphi:(I^n,\partial I^n)\to(S^n,p_0)$，则 $\Phi'_*=\Phi_*$。

根据以后的Ⅱ §4，$\pi_n(S^n,p_0)\approx J$（整数加群），映射 φ' 总是 $\pi_n(S^n,p_0)$ 的一个生成元的代表映射。可见，如果 $\varphi'\not\simeq\varphi:(I^n,\partial I^n)\to(S^n,p_0)$，则 $\Phi'_*=-\Phi_*$。

作为交替描述的应用，证明下面事实：

定理3.4 当 $n\geqslant2$，$\pi_n(X,x_0)$ 是交换群。

证明 令 $r_t:(S^n,p_0)\to(S^n,p_0)$ 是由式

$$r_t(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})=(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},\ t_n\cos t\pi-t_{n+1}\sin t\pi,\ t_n\sin t\pi+t_{n+1}\cos t\pi)$$

给出的(旋转)同伦。知

$$r_1\simeq r_0\simeq 1_{S^n},\quad r_1(S^n_+)=S^n_-,\quad r_1(S^n_-)=S^n_+.$$

设 $\alpha^\#=[f^\#],\beta^\#=[g^\#]\in\pi_n^\#(X,x_0)$，$f^\#(S^n_-)=x_0=g^\#(S^n_+)$。命 $h^\#:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$ 如同定义3.1。则 $f^\#r_1\simeq f^\#,g^\#r_1\simeq g^\#$，$h^\#r_1\simeq h^\#:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$。且

$$g^\#r_1(S^n_-)=x_0=f^\#r_1(S^n_+),\qquad h^\#r_1|S^n_+=g^\#r_1|S^n_+,$$

$$h^\#r_1|S^n_-=f^\#r_1|S^n_-.$$

故 $\alpha^\#+\beta^\#=[h^\#]=[h^\#r_1]=\beta^\#+\alpha^\#$。】

设 $l:S^n\to S^n$ 是反射，即

$$l(t_1,t_2,\cdots,t_n,t_{n+1})=(t_1,t_2,\cdots,t_n,-t_{n+1}).$$

知 $l(S_+^n)=S_-^n$，$l(S_-^n)=S_+^n$，$l(p_0)=p_0$。

命题3.5 设 $f:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$是映射，$n\geq 1$，则 $[f]+[fl]=0\in\pi_n(X,x_0)$，其中 0 是 $\pi_n(X,x_0)$ 的零元。

证明 不妨设 $f(S_-^n)=x_0$。令 $g:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，使得 $g|S_+^n=f|S_+^n$，$g|S_-^n=fl|S_-^n$。知 $g=f+fl$，$gl=g$。

定义 $\tilde{g}:\nabla^{n+1}\to X$为映射，使得

$$\tilde{g}(u)=g(t_1,t_2,\cdots,t_n,\sqrt{1-(t_1^2+\cdots+t_n^2)}),$$
$$u=(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})\in\nabla^{n+1};$$

及 $F:(S^n\times I,(p_0)\times I)\to(X,x_0)$为映射，使得

$$F(u,t)=\tilde{g}(tp_0+(1-t)u),\quad u\in S^n,\ t\in I.$$

易见 $g\simeq c:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，即 $[f]+[fl]=0$。▌

§4 基点的作用

现在，我们转而考虑基点 x_0 的选择，对同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 的影响。

为此，先作一些准备。

引理4.1 设∇^n与 S^{n-1} 如前，则 $\nabla^n\times(0)\cup S^{n-1}\times I$ 是 $\nabla^n\times I$ 的收缩核①，$n\geq 1$。

证明 令 $r:\nabla^n\times I\to\nabla^n\times(0)\cup S^n\times I$，使

$$r(u,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{u}{\|u\|},\ 2-\dfrac{2-t}{\|u\|}\right), & \|u\|\geq 1-\dfrac{t}{2},\\[2ex] \left(\dfrac{2u}{2-t},\ 0\right), & \|u\|\leq 1-\dfrac{t}{2},\end{cases}$$

其中 $u=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\nabla^n$，$\|u\|=\sqrt{\sum\limits_i t_i^2}$。

几何上，保核收缩映射 r 是 E^{n+1} 中由点 $A:(0,0,\cdots,2)$所作的中心投影（见图4.1）。▌

---

① 收缩核概念等见[1]Ⅱ§9.

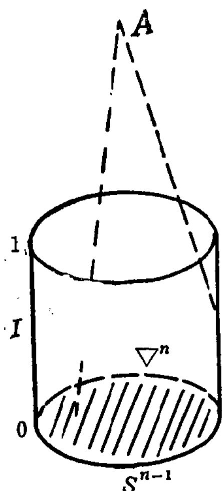


图 4.1

显然．用n维单形 σ^n 及边界 $\partial\sigma^n$ 来代替 ∇^n 与 S^{n-1}，引理成立．

下面我们引进两个很有用的命题．

命题4.2 设K是欧氏空间中的有限复形，L是其闭子复形．记

$$P=|K|\times I,\ Q=|K|\times(0)\cup|L|\times I,$$

则Q是P的收缩核．

证明 对K所含单形的个数m作归纳法：

设$m=1$，K仅由一个顶点组成，命题显然．

现设$m>1$．若K的维数为0，命题亦显然．若设K的维数>0，不妨设$L\neq K$．记 σ^n 为$K-L$中维数最高的一个单形，$K'=K-\sigma^n$，$P'=|K'|\times I$，$Q'=|K'|\times(0)\cup|L|\times I$，$P_1=P'\cup(\sigma^n\times(0))$．知 $Q=Q'\cup(\sigma^n\times(0))$．

由归纳法假设及引理4.1，存在保核收缩映射 $r':P'\to Q'$，$r'':\sigma^n\times I\to\sigma^n\times(0)\cup\partial\sigma^n\times I$．

于是令 $r_1:P\to P_1$，$r_2:P_1\to Q$，且分别由下式

$$r_1(u)=\begin{cases}u, & u\in P_1,\\ r''(u), & u\in\sigma^n\times I;\end{cases}$$

$$r_2(u)=\begin{cases}r'(u), & u\in P',\\ u, & u\in\sigma^n\times(0)\end{cases}$$

给出，则 $r=r_2r_1:P\to Q$ 为保核收缩映射．】

命题4.3（同伦扩充性质） 设K与L如命题4.2，X是任意拓扑空间．设有映射$f:|K|\to X$及（部分）同伦 $H:|L|\times I\to X$，使得$H(u,0)=(f|L)(u),u\in|L|$，则存在从f到f'的同伦$\widetilde{H}:|K|$

$\times I\to X$，使得 $\widetilde{H}(u,t)=H(u,t)$，$u\in|L|$,这里 f' 是$H||L|\times(1)$ 的扩充映射：$|K|\to X$。

证明　记多面体P与Q及收缩映射r等如命题4.2。令$\overline{H}:Q\to X$是映射，使得

$$\overline{H}(u,t)=\begin{cases}f(u), & (u,t)\in|K|\times(0),\\ H(u,t), & (u,t)\in|L|\times I.\end{cases}$$

则 $\widetilde{H}=\overline{H}r:|K|\times I\to X$为所求的同伦。】

此命题，通常称为有限复形偶(K,L)，具有（绝对）同伦扩充性质。

本节下面假定X是路径连通空间，x_0和$x_1\in X$。

记 $\pi(X,x_0,x_1)$为映射集合

$$(X,x_0,x_1)^{(I,(0),(1))}=\{\sigma|\ \sigma:(I,(0),(1))\to(X,x_0,x_1)\}$$

按同伦关系 $\sigma\simeq\sigma':(I,(0),(1))\to(X,x_0,x_1)$ 所分成的同伦类的集合。

根据同伦扩充性质，有如下几个结论：

（1）设$f\in M_n^*(X,x_0)$，$\sigma:(I,(0),(1))\to(X,x_0,x_1)$为映射。则有 $f'\in M_n^*(X,x_1)$，及从f到f'的同伦$F:S^n\times I\to X$，使 $F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。

事实上，取 $|K|=S^n$，$|L|=p_0$，$H=\sigma$ 即得结论（1）。】

（2）设$f\simeq g:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，$f'\simeq g':(S^n,p_0)\to(X,x_1)$；又设 $\sigma\simeq\sigma':(I,(0),(1))\to(X,x_0,x_1)$，及从$f$到$f'$的同伦 $F:S^n\times I\to X$，使得$F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。则存在连接g至g'的同伦$G:S^n\times I\to X$，使得 $G(p_0,t)=\sigma'(t)$，$t\in I$。

事实上，取

$$|K|=S^n\times I,\qquad |L|=S^n\times(0)\cup S^n\times(1)\cup(p_0)\times I.$$

又取映射$F:|K|\to X$及（部分）同伦$H:|L|\times I\to X$，其中$H|(S^n\times(0))\times I:f\simeq g$，$H|(S^n\times(1))\times I:f'\simeq g'$，$H|((p_0)\times I)\times I:\sigma\simeq$

σ'。运用命题4.3，存在映射$G:S^n\times I\to X$，为$H||L|\times(1)$的扩充，亦是连接g至g'的同伦，且$G(p_0,t)=\sigma'(t)$，$t\in I$。】

（3）设 f 与 $f'\in M_n^{\#}(X,x_0)$，$\sigma\simeq c:(I,\partial I)\to(X,x_0)$，$c$ 是常值映射；又设$F:S^n\times I\to X$是连接f至f'的同伦，且使得$F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。则 $f\simeq f':(S^n,p_0)\to(X,x_0)$。

事实上，在结论（2）中取 $g=f$，$g'=f'$，$x_1=x_0$，$\sigma'=c$ 即得结论（3）。】

（4）设f与 $g\in M_n^{\#}(X,x_0)$，$f'\simeq g':(S^n,p_0)\to(X,x_1)$，$\sigma\simeq\sigma:(I,(0),(1))\to(X,x_0,x_1)$；又设$F;S^n\times I\to X$ 是连接f至f'的同伦，使得$F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$，$G:S^n\times I\to X$是连接g至g'的同伦，使得$G(p_0,t)=\sigma'(t)$，$t\in I$。则

$$f\simeq g:(S^n,p_0)\to(X,x_0).$$

事实上，由结论（2），不妨设$\sigma=\sigma'$，$f'=g'$。

令$\overline{G}:S^n\times I\to X$为映射，使得 $\overline{G}(u,t)=G(u,1-t)$；及$H:S^n\times I\to X$为映射，使得

$$H(u,t)=\begin{cases}F(u,2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \overline{G}(u,2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

知$H|(p_0)\times I\simeq c:(I,\partial I)\to(X,x_0)$，由结论（3）即得结论（4）。】

有了上述准备，我们来考虑路径连通空间X中不同基点处同伦群的关系。

定义4.1 设 $\alpha'=[f']\in\pi_n(X,x_1)$，$\xi=[\sigma]\in\pi(X,x_0,x_1)$。仿照结论（1），对于 $f'\in M_n^{\#}(X,x_1)$与σ，存在 $f\in M_n^{\#}(X,x_0)$及连接f至f'的同伦$F:S^n\times I\to X$，使$F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。于是，命 $\alpha=\xi_*(\alpha')=[f]\in\pi_n(X,x_0)$，得到单值对应

$$\xi_*:\pi_n(X,x_1)\to\pi_n(X,x_0).$$

即$\xi_*(\alpha')$仅与α'，ξ有关，而与其代表映射f'与σ的选取无关（由结论（4））。

进一步，还有

（a）ξ_* 的在上性：由结论（1）立即得到；

（b）ξ_* 的一一对应性：仿照结论（4）立即得到；

（c）ξ_* 是群同态：设 $\alpha_i'=[f_i']\in\pi_n(X,x_1)$，$\xi_*(\alpha_i')=[f_i]$，$\xi=[\sigma]$；及连接 f_i 至 f_i' 的同伦 $F_i:S^n\times I\to X$，$F_i(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$，其中 $i=1,2$。

取 $\tau_1\simeq\tau_2\simeq I_{S^n}:(S^n,p_0)\to(S^n,p_0)$，使得

$\tau_1(S_-^n)=p_0=\tau_2(S_+^n)$ （见命题2.2）。

令 $F:S^n\times I\to X$ 是由式

$$F(u,t)=\begin{cases}F_1(\tau_1(u),t), & u\in S_+^n,\ t\in I,\\ F_2(\tau_2(u),t), & u\in S_-^n,\ t\in I\end{cases}$$

给出的映射，它是连接 $f_1\tau_1+f_2\tau_2$ 至 $f_1'\tau_1+f_2'\tau_2$ 的同伦，且 $F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。因此有

$$\begin{aligned}\xi_*(\alpha_1'+\alpha_2')&=\xi_*[f_1'\tau_1+f_2'\tau_2]=[f_1\tau_1+f_2\tau_2]\\&=[f_1\tau_1]+[f_2\tau_2]=\xi_*(\alpha_1')+\xi_*(\alpha_2').\end{aligned}$$

由此，我们证明了下面的定理。

定理4.4 设X是路径连通空间，对任意 x_0 与 $x_1\in X$，$\xi\in\pi(X,x_0,x_1)$，按定义4.1，有

$$\xi_*:\pi_n(X,x_1)\approx\pi_n(X,x_0)。】$$

附记 当X是路径连通空间，作为不依赖于基点的抽象群 $\pi_n(X)$，$n\geqslant1$，称为X的 n 维同伦群。

一般地，如X不是路径连通的，定理表明，只要 x_0 与 x_1 属于X的同一路径分支，有 $\pi_n(X,x_1)\approx\pi_n(X,x_0)$，$n\geqslant1$；且如 X_0 是包含 x_0 的X的路径分支，则 $\pi_n(X,x_0)=\pi_n(X_0,x_0)$，$n\geqslant1$。

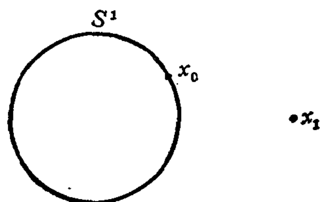


图 4.2

如图4.2，$X=S^1\cup\{x_1\}$，易见$\pi_1(X, x_1)=0$，$\pi_1(X, x_0)\approx J$（见Ⅱ§4）。这个例子表明，当x_0与x_1不属于同一路径分支时，其同伦群一般无什么关系可言。

定义4.2 设π与Σ是抽象群，运算为乘法。如果对任意$\xi\in\pi$，给出Σ上自同态$\xi_*:\Sigma\to\Sigma$，即对于α与$\beta\in\Sigma$，有$\xi_*(\alpha\beta)=\xi_*(\alpha)\xi_*(\beta)$，且适合性质：

（1）对于ξ与$\eta\in\pi$，$\xi_*(\eta_*(\alpha))=(\xi\eta)_*(\alpha)$，$\alpha\in\Sigma$；

（2）设$\iota\in\pi$是单位元，对任意$\alpha\in\Sigma$，$\iota_*(\alpha)=\alpha$。

则称π是Σ上的**运算群**。

实际上，由性质（1）与（2），$\xi\in\pi$给出Σ上的自同构。

例如，设Σ为一个群，对任意ξ与$\alpha\in\Sigma$，命$\xi_*(\alpha)=\xi\alpha\xi^{-1}\in\Sigma$。可见，$\Sigma$上如此的共轭对应$\alpha\to\xi\alpha\xi^{-1}$的全体组成的内自同构群是$\Sigma$上的运算群。

定理4.5 基本群$\pi_1(X,x_0)$是同伦群$\pi_n(X,x_0)$上的运算群；特别地，对于$\xi\in\pi_1(X,x_0)$，$\xi_*:\pi_1(X,x_0)\approx\pi_1(X,x_0)$是$\pi_1(X,x_0)$上的内自同构。

证明 首先，在定理4.4中，取$x_1=x_0$，对于$\xi\in\pi_1(X,x_0)$，有$\xi_*:\pi_n(X,x_0)\approx\pi_n(X,x_0)$，$n\geqslant1$。且

（1）对$\xi=[\sigma]$，$\eta=[\sigma']\in\pi_1(X,x_0)$，$\alpha=[f'']\in\pi_n(X,x_0)$，这里$\sigma$与$\sigma':(I,\partial I)\to(X,x_0)$，$f''\in M_*^\#(X,x_0)$，知$\xi\cdot\eta=[\tau]$，其中$\tau:(I,\partial I)\to(X,x_0)$是映射，使得

$$\tau(t)=\begin{cases}\sigma(2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \sigma'(2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant1.\end{cases}$$

若$\eta_*(\alpha)=[f']$，则有连接f'到f''的同伦$F:S^n\times I\to X$，

使 $F(p_0,t)=\sigma'(t)$，$t\in I$；若 $\xi_*([f'])=[f]$，则有连接 f 到 f' 的同伦 $G:S^n\times I\to X$，使 $G(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。

于是，命 $H:S^n\times I\to X$ 为下式

$$H(u,t)=\begin{cases}G(u,2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ F(u,2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

给出的映射，它是连接 f 到 f'' 的同伦，且 $H(p_0,t)=\tau(t),t\in I$，故

$$(\xi\eta)_*(\alpha)=[\tau]_*([f''])=[f]=\xi_*(\eta_*(\alpha)).$$

（2）设 $\iota=[c]$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的单位元，$c(I)=x_0$ 是常值映射，易见 $\iota_*(\alpha)=\alpha$。

总之，$\pi_1(X,x_0)$ 是 $\pi_n(X,x_0)$ 上的运算群，$n\geqslant 1$。

其次，设 $\xi=[\sigma]$，$\alpha=[f']\in\pi_1(X,x_0)$。记 $\xi_*(\alpha)=[f]$。又设 $F:S^1\times I\to X$ 是连接 f 至 f' 的同伦映射，$F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。考虑映射 $\bar{\sigma}:I\to X$，$\bar{\sigma}(t)=\sigma(1-t)$ 及映射 $\rho:I^2\to S^1\times I$，使得 $\rho(t_1,t_2)=(\varphi_1(t_1),t_2)$，其中 φ_1 见命题 3.1。

记 $H:(I\times I,\ (0)\times I,\ (1)\times I)\to(I^2,(a),(b))$ 为映射，使得 $H|I\times(0)=1_I$，$H|I\times(1)$ 是将 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$、$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$、$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 分别线性映射至线节 ab、bc 与 cd（见图 4.3）。则合成映射 $G=F\rho H:(I\times I,\ \partial I\times I)\to(X,x_0)$，使得

$$G|I\times(0)=f,$$

$$G|I\times(1)=(\sigma+f'\varphi)+\bar{\sigma}.$$

故 $\quad\xi_*(\alpha)=\xi\alpha\xi^{-1}$.】

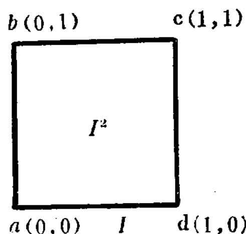


图 4.3

附记 一般地，对于 x_0、x_1、$x_2\in X$，$\xi=[\sigma]\in\pi(X,x_0,x_1)$，$\eta=[\tau]\in\pi(X,x_1,x_2)$，可定义：$\xi\cdot\eta=[\sigma+\tau]\in\pi(X,x_0,x_2)$；

$\xi^{-1}=[\bar{\sigma}]\in\pi(X,x_1,x_0)$，其中$\bar{\sigma}(t)=\sigma(1-t)$，$t\in I$。

易见，此定义与代表映射σ，τ的选取无关，且类似地有性质：

(i) $\xi\in\pi(X,x_0,x_1)$、$\eta\in\pi(X,x_1,x_2)$、$\zeta\in\pi(X,x_2,x_3)$，则

$$(\xi\cdot\eta)\cdot\zeta=\xi\cdot(\eta\cdot\zeta);$$

(ii) $\alpha\in\pi_n(X,x_2)$，则$(\xi\eta)_*(\alpha)=\xi_*(\eta_*(\alpha))$；

(iii) $\xi\cdot\xi^{-1}=\iota\in\pi_1(X,x_0)$是其单位元，且对任意$\alpha\in\pi_n(X,x_0)$，$(\xi\cdot\xi^{-1})_*(\alpha)=(\alpha)$。

……（复习题）。

定义4.3　路径连通空间X称为**n-单式的**，如果对于任意$\xi\in\pi_1(X,x_0)$，$\xi_*:\pi_n(X,x_0)\approx\pi_n(X,x_0)$ $(n\geqslant1)$是恒同同构。

在路径连通空间X中，n-单式的定义与基点$x_0\in X$的选取无关。这是因为：设X在x_0处是n-单式的。则对于$\xi_1\in\pi_1(X,x_1)$及$\alpha'\in\pi_n(X,x_1)$，有$\eta\in\pi(X,x_0,x_1)$，使得$\alpha=\eta_*(\alpha')\in\pi_n(X,x_0)$及$\xi=\eta\cdot\xi_1\cdot\eta^{-1}\in\pi_1(X,x_0)$。知$\eta_*(\xi_{1*}(\alpha'))=(\eta\cdot\xi_1\cdot\eta^{-1})_*(\eta_*(\alpha'))=\xi_*(\eta_*(\alpha'))=\eta_*(\alpha')$。于是因$\eta_*$是同构，故$\xi_{1*}(\alpha')=\alpha'$，即$X$在$x_1$处亦是$n$-单式的。

例4.1　路径连通空间X称为**单连通**的，如果$\pi_1(X)$是单位元群（亦记$\pi_1(X)=0$）。显然，单连通空间X是n-单式的，$n\geqslant1$。

例4.2　设$\pi_n(X,x_0)=0$，则X是n-单式的。

作为定理4.5的应用，有

命题4.6　路径连通空间X是1-单式的，当且仅当，$\pi_1(X,x_0)$是交换群。

证明　X是1-单式的，当且仅当，对任意ξ与$\eta\in\pi_1(X,x_0)$，

有$\xi_*(\eta)=\eta$，即$\xi\cdot\eta\cdot\xi^{-1}=\eta$，换言之，$\xi\cdot\eta=\eta\cdot\xi$.】

命题4.7 路径连通空间X是n-单式的，当且仅当，对任意x_0与$x_1\in X$，及ξ与$\xi'\in\pi(X,x_0,x_1)$，有

$$\xi_*=\xi'_*:\pi_n(X,x_1)\approx\pi_n(X,x_0).$$

证明 分两步.

必要性 设$\alpha'\in\pi_n(X,x_1)$. 因$\xi^{-1}\cdot\xi'\in\pi_1(X,x_1)$，知$(\xi^{-1}\cdot\xi')_*(\alpha')=\alpha'$，故$\xi_*(\alpha')=\xi_*((\xi^{-1}\cdot\xi')_*(\alpha'))=(\xi\cdot\xi^{-1}\cdot\xi')_*(\alpha')=\xi'_*(\alpha')$，即$\xi_*=\xi'_*$.

充分性 取$x_1=x_0$，$\xi'=\iota=[c]$. 按照假设及定理4.5，知ξ_*是$\pi_n(X,x_0)$上的恒同同构，即X为n-单式的.】

定理4.8 路径连通空间X是n-单式的，当且仅当，对任意$x_0\in X$，及$f\simeq g:S^n\to X$，而$f(p_0)=x_0=g(p_0)$，则

$$f\simeq g:(S^n,p_0)\to(X,x_0).$$

证明 必要性 设$F:S^n\times I\to X$是连接f至g的同伦. 记$\sigma:(I,(0),(1))\to(X,x_0,x_0)$，使得$\sigma(t)=F(p_0,t)$，$t\in I$；及$\xi=[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$. 因$X$是$n$-单式的，故$[g]=\xi_*[g]=[f]$，即

$$f\simeq g:(S^n,p_0)\to(X,x_0).$$

充分性 对$\xi\in\pi_1(X,x_0)$及$\alpha=[g]\in\pi_n(X,x_0)$，记$\xi_*(\alpha)=[f]$，即有$f\simeq g:S^n\to X$. 按照假设$[f]=[g]$，故$\xi_*(\alpha)=\alpha$. 即$X$是$n$-单式的.】

推论4.9 设路径连通空间X是n-单式的. 则对于任意$x_0\in X$，映射$f':S^n\to X$总决定$\pi_n(X,x_0)$中唯一的元素$\alpha=[f]$，使得$f\simeq f':S^n\to X$.

证明 记$f'(p_0)=x_1$. 由前述结论（1），如此的$\alpha=[f]$是存在的. 至于唯一性，根据定理4.8是显然成立的.】

换言之，在n-单式空间X中，映射$S^n\to X$的（自由）同伦类集合与相对于基点的同伦类集合$\pi_n(X,x_0)$是一一对应的.

例4.3 $S^m(m>1)$对所有$n\geqslant1$，是n-单式的，因为S^m

是单连通的。

事实上，对 $f:(S^1,p_0)\to(S^m,p_0)$，利用单纯逼近法①，有单纯映射 $f':(S^1,p_0)\to(S^m,p_0)$，使 $f\simeq f':(S^1,p_0)\to(S^m,p_0)$。而由于 $f'(S^1)\subseteq S^m-(x_0)$，$x_0\in S^m$，$x_0\neq p_0$，及 $S^m-(x_0)$ 与可缩空间 E^m 同胚，故 $f\simeq c:(S^1,p_0)\to(S^m,p_0)$。

S^1 是 n-单式的，见练习题17. 非 n-单式空间的简例见练习题18。

§5 相对同伦群

设 A 是拓扑空间 X 的子空间，$x_0\in A$。按§2的方法，对 $n\geqslant1$，有同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 与 $\pi_n(A,x_0)$，那么它们的关系如何？

类似于同调论中的考虑，我们将对拓扑空间偶 (X,A) 引入同伦群，这便是本节将介绍的相对同伦群 $\pi_n(X,A,x_0)$，$n\geqslant2$。

关于相对同伦群的定义、交替描述、基点的作用等是与§2，§3，§4的讨论平行的。因此，我们在叙述时略去了许多细节，供读者复习补充。相对同伦群的系统综合描述，最初见于1947年胡世桢的文章[21]，同伦群理论的初期发展情况介绍，也可在这篇文章中看到。

1. 定义

我们用记号 $I^{n-1}=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in I^n\mid t_n=0\}\subseteq\partial I^n$ 作为 I^n 的一个面，$n\geqslant2$；$J^{n-1}=\overline{\partial I^n-I^n}$，即为 I^n 的其诸面的集合和余。

易见 $\partial I^n=I^{n-1}\cup J^{n-1}$，$\partial I^{n-1}=I^{n-1}\cap J^{n-1}$。

定义5.1 设 (X,A) 是拓扑空间偶，$x_0\in A$，$n\geqslant2$。命 $M_n(X,A,x_0)=\{f\mid f:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(X,A,x_0)$ 是映射$\}$，及 $\pi_n(X,A,x_0)$ 表示 $M_n(X,A,x_0)$ 中就映射的同伦关系 $f\simeq g:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(X,A,x_0)$ 所分成的同伦集合。我们在 $\pi_n(X,A,x_0)$ 中引入运算"+"：

---

① 见[1]Ⅳ§5.

设 $\alpha=[f]$、$\beta=[g]\in\pi_n(X,A,x_0)$。定义 $\alpha+\beta=[f+g]\in\pi_n(X,A,x_0)$，其中 $f+g$ 见定义2.1。易见 $\alpha+\beta$ 与 α,β 的代表映射 f，g 的选取无关。

定理5.1 当 $n\geqslant 2$，$\pi_n(X, A, x_0)$ 就上述运算"+"组成一个群，称为空间偶（X，A）在基点 x_0 处的第 n 个（或称 n 维）**相对同伦群**. ┃

特别地，$A=\{x_0\}$，$\pi_n(X,A,x_0)=\pi_n(X,x_0)$。

2. 交替描述

记 $\nabla^n_+=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\nabla^n|t_n\geqslant 0\}$ 为上半（实心）球体，

$\nabla^n_-=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\nabla^n|t_n\leqslant 0\}$ 为下半（实心）球体。

易见 $\nabla^n=\nabla^n_+\cup\nabla^n_-$，$\nabla^{n-1}=\nabla^n_+\cap\nabla^n_-$。

命题5.2 $n\geqslant 2$，存在映射 $\Psi:I^n\to\nabla^n$，使得

（1）$\Psi(J^{n-1})=p_0$；

（2）Ψ 将 $I^n-\partial I^n$ 同胚映射至 ∇^n-S^{n-1} 上，将 $I^{n-1}-\partial I^{n-1}$ 同胚映射至 $S^{n-1}-(p_0)$ 上；

（3）$\Psi(I^n_1)=\nabla^n_+$，$\Psi(I^n_2)=\nabla^n_-$。┃

命 $M^\#_n(X,A,x_0)=\{f^\#|f^\#:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A, x_0)$ 是映射$\}$ 及 $\pi^\#_n(X,A,x_0)$ 表示 $M^\#_n(X,A,x_0)$ 中就映射的同伦关系 $f^\#\simeq g^\#:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$ 所分成的同伦类的集合。

命题5.3 设 $\Psi:M^\#_n(X,A,x_0)\to M_n(X,A,x_0)$ 为单值对应，使得对于 $f^\#\in M^\#_n(X,A,x_0)$，有 $\Psi(f^\#)=f^\#\Psi\in M_n(X,A,x_0)$。则 Ψ 是一一对应；且导出一一对应 $\Psi_*:\pi^\#_n(X, A, x_0)\to\pi_n(X, A,x_0)$，$n\geqslant 2$，使得

对于 $\alpha'=[f^\#]\in\pi^\#_n(X,A,x_0)$，有 $\Psi_*(\alpha')=[f^\#\Psi]$。┃

定义5.2 设 $[f^\#]$ 与 $[g^\#]\in\pi^\#_n(X,A,x_0)$，且 $f^\#(\nabla^n_-)=x_0=g^\#(\nabla^n_+)$，$n\geqslant 2$。命 $f^\#+g^\#=h^\#\in M^\#_n(X,A,x_0)$，使得

$$h^\#(u)=\begin{cases}f^\#(u), & u\in\nabla^n_+,\\ g^\#(u), & u\in\nabla^n_-.\end{cases}$$

于是我们定义 $[f^{\#}]+[g^{\#}]=[h^{\#}]\in\pi_n^{\#}(X,A,x_0)$，上述性质的代表映射 $f^{\#}$ 与 $g^{\#}$ 是存在的。因为，如 $\alpha=\Psi_*(\alpha')$，$\beta=\Psi_*(\beta')$，仿照命题2.2，α 与 β 分别存在代表映射 f 与 g，使 $f(I_2^n)=x_0=g(I_1^n)$。此时与 f、g 相应的映射 $f^{\#}$、$g^{\#}$,便有

$$f^{\#}(\nabla_-^n)=x_0=g^{\#}(\nabla_+^n).$$

定理5.4 当 $n\geqslant 2$，$\pi_n^{\#}(X,A,x_0)$就上述运算"+"组成一个群，且 $\Psi_*:\pi_n^{\#}(X,A,x_0)\approx\pi_n(X,A,x_0)$。】

利用定理3.4中的旋转同伦 r_t，同样有

定理5.5 当 $n\geqslant 3$，$\pi_n(X,A,x_0)$是交换群。】

附记1. 以后 $\pi_n^{\#}(X,A,x_0)$ 仍记作 $\pi_n(X,A,x_0)$。当 $n=2$，$\pi_2(X,A,x_0)$一般不是交换群。

附记2. 设 $\Psi':I^n\to\nabla^n$ 是适合命题5.2中性质(1)与(2)的映射．易见它也导出一一对应 $\Psi'_*:\pi_n^{\#}(X,A,x_0)\to\pi_n(X,A,x_0)$，且因 $\pi_n(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\approx J$(见§7及Ⅱ．§4)，知当 $\Psi'\simeq\Psi:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(\nabla^n,S^{n-1},p_0)$ 时，$\Psi'_*=\Psi_*$；当 $\Psi'\not\simeq\Psi:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(\nabla^n,S^{n-1},p_0)$ 时，$\Psi'_*=-\Psi_*$。

附记3. 当 $A=\{x_0\}$，$\Psi_*:\pi_n^{\#}(X,\{x_0\},x_0)\approx\pi_n(X,\{x_0\},x_0)$。可见同伦群 $\pi_n(X,x_0)$有另一种描述方式：以映射$(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,x_0)$的集合及其同伦类替代$M_n(X,x_0)$等。有时会用到这种描述。

3. 基点的作用

拓扑空间偶(X,A)称为路径连通的，如果X与A均是路径连通的。

定义5.3 设(X,A)是路径连通的，x_0与$x_1\in A$。任给 $\alpha'=[f']\in\pi_n(X,A,x_1)$，其中 $f'\in M_n^{\#}(X,A,x_1)$，及$\xi=[\sigma]\in\pi(A,x_0,x_1)$．由于存在映射$F$：$(\nabla^n\times I,S^{n-1}\times I)\to(X,$

A)，使 $F|\nabla^n\times(1)=f'$，$F(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。我们定义

$\xi_*(a')=a=[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$，其中 $f=F|\nabla^n\times(0)$。

事实上，运用同伦扩充性质（命题4.3），有同伦 $H:S^{n-1}\times I\to A$，使 $H|S^{n-1}\times(1)=f'|S^{n-1}$，$H(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。再用同伦扩充性质，即有上述的同伦 F（取 $|K|=\nabla^n\times I$，$|L|=\nabla^n\times(1)\cup S^{n-1}\times I$，$H$ 为部份同伦）。

易见 $a=\xi_*(a')$ 仅与同伦类 a' 和 ξ 有关，与其代表映射 f' 和 σ 的选取无关。于是得到单值对应 $\xi_*:\pi_n(X,A,x_1)\to\pi_n(X,A,x_0)$。

同样地，重复运用命题4.3，可以证明下述定理。

定理5.6 设 (X,A) 是路径连通的。对任意 x_0 与 $x_1\in A$，给定 $\xi\in\pi(A,x_0,x_1)$，则 $\xi_*:\pi_n(X,A,x_1)\approx\pi_n(X,A,x_0)$，$n\geqslant 2$。】

定理5.7 基本群 $\pi_1(A,x_0)$ 是相对同伦群 $\pi_n(X,A,x_0)$（$n\geqslant 2$）上的运算群。】

定义5.4 路径连通的空间偶 (X,A) 称为 **n-单式** 的，如果对任意 $\xi\in\pi_1(A,x_0)$，$\xi_*:\pi_n(x,A,x_0)\approx\pi_n(X,A,x_0)$ 均为恒同同构。

n-单式这个概念与基点 $x_0\in A$ 的选取无关。

定理5.8 路径连通的空间偶 (X,A) 是 n-单式的，当且仅当，对任意 $x_0\in A$，如果 $f\simeq g:(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,A)$，$f(p_0)=x_0=g(p_0)$。则 $f\simeq g:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$。】

推论5.9 设 (X,A) 是 n-单式的，则对任意 $x_0\in A$，映射 $f':(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,A)$ 总决定 $\pi_n(X,A,x_0)$ 中的唯一的元素 $a=[f]$，使 $f\simeq f':(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,A)$。】

附记1. 当 $A=\{x_0\}$ 时，$\pi_1(A,x_0)=0$，它在 $\pi_n(X,A,x_0)=\pi_n(X,x_0)$ 上的运算作用是平凡的。可见定理5.7不能全认为是定理4.5的简单推广。

附记2. $\pi_1(A, x_0)$在$\pi_2(X, A, x_0)$上的运算作用见命题7.7.

附记3. 对路径连通的空间偶(X, A)，作为不依赖于基点$x_0 \in A$的抽象群$\pi_n(X, A)$，$n \geqslant 2$，称为空间偶(X, A)的n维相对同伦群.

§6 同伦群的伦型不变性

同伦群(包括相对同伦群)这一代数对象在拓扑中占着重要地位的一个原因，是由于它是拓扑空间(空间偶)的拓扑性质，即同胚的空间(空间偶)具有同构的各维同伦群(相对同伦群).事实上，与多面体的同调群等一样，它还是伦型不变量.

本节讨论的空间与空间偶都假定是路径连通的.

定义6.1 空间偶(X, A)与(Y, B)称为**同伦等价**的(**具有相同伦型**)，如果存在映射$\chi:(X, A) \to (Y, B)$及$\theta:(Y, B) \to (X, A)$，使$\theta\chi \simeq 1_{(X,A)}:(X, A) \to (X, A)$及$\chi\theta \simeq 1_{(Y,B)}:(Y, B) \to (Y, B)$，这里$1_{(X,A)}$，$1_{(Y,B)}$分别是$(X, A)$与$(Y, B)$上恒同映射.此时$\chi$称为从$(X, A)$到$(Y, B)$的一个**同伦等价**(映射)，$\theta$称为$\chi$的一个**同伦逆**，并记$\chi:(X, A) \simeq (Y, B)$.

易见，空间偶的同伦等价是一个等价关系.

定义6.2 设$\chi:(X, A) \to (Y, B)$是映射，$x_0 \in A$，$y_0 = \chi(x_0) \in B$.对$\alpha = [f] \in \pi_n(X, A, x_0)$，$f:(\nabla^n, S^{n-1}, p_0) \to (X, A, x_0)$，命$\chi_*(\alpha) = [\chi f] \in \pi_n(Y, B, y_0)$.则定义了同态

$$\chi_*:\pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0), \quad n \geqslant 2.$$

事实上，

(1) χ_*的定义与α的代表映射f的选取无关(命题1.4).

(2) 对$\alpha = [f^\#]$与$\beta = [g^\#] \in \pi_n(X, A, x_0)$，$f^\#(\nabla^n_-) = x_0 = g^\#(\nabla^n_+)$.则

$$\chi_*(\alpha+\beta)=\chi_*[f^\#+g^\#]=[\chi(f^\#+g^\#)]$$
$$=[\chi f^\#+\chi g^\#]=\chi_*(\alpha)+\chi_*(\beta).$$

进一步，有

命题6.1　设 $\chi:(X,A)\to(Y,B)$，$\theta:(Y,B)\to(Z,C)$ 是两个映射，$x_0\in A$，$y_0=\chi(x_0)$，$z_0=\theta(y_0)$。则

$$(\theta\chi)_*=\theta_*\chi_*:\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(Z,C,z_0),\quad n\geqslant 2.$$

证明　由定义 6.2 此命题显然成立.】

命题6.2　设 $\chi\simeq\chi':(X,A)\to(Y,B)$，$x_0\in A$，$y_0=\chi(x_0)$，$y_0'=\chi'(x_0)$，则有 $\xi\in\pi(B,y_0,y_0')$ 使得

$$\xi_*\chi_*'=\chi_*:\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(Y,B,y_0),\quad n\geqslant 2,$$

其中 ξ_* 见定理 5.6。

证明　记 $F:(X\times I,A\times I)\to(Y,B)$ 是从 χ 到 χ' 的同伦。令 $\sigma:(I,(0),(1))\to(Y,y_0,y_0')$，使 $\sigma(t)=F(x_0,t)$，$t\in I$。对 $\alpha=[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$，$f:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$，知 $\chi_*(\alpha)=[\chi f]$，$\chi_*'(\alpha)=[\chi' f]$。

命 $H:(\nabla^n\times I,S^{n-1}\times I)\to(Y,B)$ 为映射，使 $H(u,t)=F(f(u),t)$，$u\in\nabla^n$，$t\in I$。知 H 是连接 χf 到 $\chi' f$ 的同伦，且 $H(p_0,t)=\sigma(t)$，$t\in I$。由定义 5.3，得

$$\chi_*(\alpha)=\xi_*(\chi_*'(\alpha))=(\xi_*\chi_*')(\alpha).\text{】}$$

推论6.3　设 $\chi\simeq\chi':(X,A,x_0)\to(Y,B,y_0)$，则

$$\chi_*=\chi_*':\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(Y,B,y_0),\quad n\geqslant 2.$$

证明　此时 $\sigma:(I,\partial I)\to(Y,y_0)$ 是常值映射，知 $\xi=[\sigma]\in\pi_1(Y,y_0)$ 是其单位元，ξ_* 为恒同同构。】

定理6.4　设 $\chi:(X,A)\to(Y,B)$ 是同伦等价映射，则 $\chi_*:\pi_n(X,A,x_0)\approx\pi_n(Y,B,y_0)$，$n\geqslant 2$，$x_0\in A$，$y_0=\chi(x_0)$。

证明　设 $\theta:(Y,B)\to(X,A)$ 是 χ 的同伦逆。因为 $\theta\chi\simeq 1_{(X,A)}:(X,A)\to(X,A)$，$\chi\theta\simeq 1_{(Y,B)}:(Y,B)\to(Y,B)$，记 $x_0'=(\theta\chi)(x_0)=\theta(y_0)$，$y_0'=(\chi\theta)(y_0)=\chi(x_0')$。由命题6.2，则有 $\xi\in\pi(A,x_0,x_0')$，$\eta\in\pi(B,y_0,y_0')$，使 $(\theta\chi)_*=\xi_*\cdot 1_{(X,A)*}$，

及$(\chi\theta)_*=\eta_*\cdot 1_{(Y,B)*}$，其中$1_{(X,A)*}$，$1_{(Y,B)*}$是恒同同构。

于是 $\theta_*\chi_*=(\theta\chi)_*:\pi_n(X,A,x_0)\approx\pi_n(X,A,x_0')$，
$\chi_*'\theta_*=(\chi\theta)_*:\pi_n(Y,B,y_0)\approx\pi_n(Y,B,y_0')$， $n\geqslant 2$。

这里 χ_*' 是 χ 导出的同态：$\pi_n(X,A,x_0')\to\pi_n(Y,B,y_0')$，$n\geqslant 2$。故 $\theta_*:\pi_n(Y,B,y_0)\approx\pi_n(X,A,x_0')$。因之亦有

$$\chi_*:\pi_n(X,A,x_0)\approx\pi_n(Y,B,y_0),\ n\geqslant 2.$$]

以上是空间偶的情形，与此类似，有

定义6.2′ 设 $\chi:X\to Y$ 是映射，$x_0\in X$，$y_0=\chi(x_0)$。对 $\alpha=[f]\in\pi_n(X,x_0)$，$f:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，命 $\chi_*(\alpha)=[\chi f]\in\pi_n(Y,y_0)$。则定义了同态 $\chi_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,y_0)$，$n\geqslant 1$。

命题6.1′ 设 $\chi:X\to Y$，$\theta:Y\to Z$ 是两个映射，$x_0\in A$，$y_0=\chi(x_0)$，$z_0=\theta(y_0)$，则

$$(\theta\chi)_*=\theta_*\chi_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Z,z_0),\quad n\geqslant 1.$$]

命题6.2′ 设 $\chi\simeq\chi':X\to Y$，$x_0\in A$，$y_0=\chi(x_0)$，$y_0'=\chi'(x_0)$。则有 $\xi\in\pi(Y,y_0,y_0')$，使 $\xi_*\chi_*'=\chi_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,y_0)$，$n\geqslant 1$，其中$\xi_*$见定理4.4。]

推论6.3′ 设 $\chi\simeq\chi':(X,x_0)\to(Y,y_0)$，则

$$\chi_*=\chi_*':\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,y_0),\quad n\geqslant 1.$$]

定理6.4′ 设 $\chi:X\to Y$ 是同伦等价映射，$x_0\in X$，$y_0=\chi(x_0)$，则 $\chi_*:\pi_n(X,x_0)\approx\pi_n(Y,y_0)$，$n\geqslant 1$。]

所有这些命题与定理的证明，都留给读者自己去完成。（复习题。）

§7. 正合同伦叙列

设A是X的子空间，由同伦群 $\pi_n(X)$ 与 $\pi_n(A)$，$n\geqslant 1$ 及 $\pi_n(X,A)$，$n\geqslant 2$ 组成的正合叙列是空间偶(X,A)的基本性质之一。在同伦群的计算中，同伦叙列也是重要的工具。读者在阅读本节时，可参照[1]V，§4，即有限复形偶(K,L)的

正合同调叙列。

定义7.1　设空间偶(X, A)是路径连通的，$x_0 \in A$。下述叙列(S)称为(X, A)在基点x_0处的**同伦叙列**：

$$\cdots\xrightarrow{d_*}\pi_n(A, x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X, x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X, A, x_0)\xrightarrow{d_*}$$
$$\pi_{n-1}(A, x_0)\xrightarrow{i_*}\cdots \tag{S}$$
$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_2(X, A, x_0)\xrightarrow{d_*}\pi_1(A, x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_1(X, x_0)\xrightarrow{j_*}$$
$$\pi_1(X, A, x_0)\to 0$$

其中 $\pi_1(X, A, x_0)$ 是指 $M_1^*(X, A, x_0)$ 中就映射同伦关系 $f\simeq g:(\nabla^1, S^0, (1))\to(X, A, x_0)$所分成的同伦类集合(注意一般不是群)。

(S)中包含同态i_*、截去同态j_*、边沿同态d_*的定义如下：(1) i_*是包含映射$i: A\subset X$根据定义6.2′导出的同态$i_*:\pi_n(A, x_0)\to\pi_n(X, x_0)$，$n\geqslant 1$；(2) j_*是包含映射$j:(X, x_0)\to(X, A)$根据定义6.2导出的同态$j_*:\pi_n(X, x_0)\to\pi_n(X, A, x_0)$，$n\geqslant 2$。当$n=1$，$j_*$是单值对应：$\pi_1(X, x_0)\to\pi_1(X, A, x_0)$；(3) 对$\alpha=[f]\in\pi_n(X, A, x_0)$，$n\geqslant 2$，$f:(\nabla^n, S^{n-1}, p_0)\to(X, A, x_0)$，命 $d_*(\alpha)=[f|S^{n-1}]\in\pi_{n-1}(A, x_0)$。易见$d_*(\alpha)$与$\alpha$的代表映射$f$的选取无关，且$d_*$是同态：$\pi_n(X, A, x_0)\to\pi_{n-1}(A, x_0)$，$n\geqslant 2$。

定理7.1　路径连通的空间偶(X, A)在任一基点$x_0\in A$处的同伦叙列(S)是正合的。

在证明之前，我们先叙述几个有用的引理。

引理7.2　设$f: S^{n-1}\to X$是映射，$n>1$，则下述的条件是等价的：

(1) $f\simeq c:(S^{n-1}, p_0)\to(X, x_0)$，$c$常值映射(下同)；

(2) $f\simeq c: S^{n-1}\to X$；

（3）f 可扩充为映射 $\widetilde{f}:\nabla^n\to X$。

证明 （1）⇒（2）显然；

（2）⇒（3） 由同伦扩充性质即得；

（3）⇒（1） 命 $F(u,t)=\widetilde{f}(tp_0+(1-t)u),u\in S^n,t\in I$，则 $F:(S^n\times I,\ (p_0)\times I)\to(X,x_0)$ 是连接 f 至 c 的同伦。（见命题3.5的证明）】

引理 7.3 设 $a=[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$，且 $f\simeq f':(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$，其中 $f'(\nabla^n)\subseteq A$，$n\geqslant1$，则 $a=0$。

证明 命 $F:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$ 为映射，使得 $F(u,t)=f'(tp_0+(1-t)u),u\in\nabla^n,t\in I$。则 $f'\simeq c:(\nabla^n,\ S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$，故 $a=[f']=[c]=0$.】

引理 7.4 设 $a=[f]\in\pi_n(X,x_0),f:(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,x_0)$。则 $f\simeq c:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0),n\geqslant1$，当且仅当 $f\simeq f':(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,\ x_0)$，其中 $f'(\nabla^n)\subseteq A$。

证明 必要性 设 $F:(\nabla^n\times I,S^{n-1}\times I,(p_0)\times I)\to(X,A,x_0)$ 是连接 f 至 c 的同伦。记 $g=F|S^{n-1}\times I\cup\nabla^n\times(1):S^{n-1}\times I\cup\nabla^n\times(1)\to A$。由引理4.1，$g$ 可扩充成映射 $G:\nabla^n\times I\to A$。

命 $\widetilde{F}:\nabla^n\times I\to X$ 是映射，使得

$$\widetilde{F}(u,t)=\begin{cases}F(u,2t), & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\\ G(u,2-2t), & \dfrac{1}{2}\geqslant t\geqslant1.\end{cases}$$

（注意到 $F(\nabla^n\times(1)=x_0=G(\nabla^n\times(1))$，利用粘接引理，$\widetilde{F}$ 是映射.）由于 $\widetilde{F}(u,t)=\widetilde{F}(u,1-t),u\in S^{n-1},t\in I$，根据定理2.1（3）知，$\widetilde{F}|S^{n-1}\times I\simeq c:(S^{n-1}\times I,S^{n-1}\times\partial I)\to(A,x_0)$。再由同伦扩充性质，映射 $F':S^{n-1}\times I\cup\nabla^n\times(0)\cup\nabla^n\times(1)\to X$，$F'|S^{n-1}\times I=c$，$F'|\nabla^n\times(0)\cup\nabla^n\times(1)=\widetilde{F}|\nabla^n\times(0)\cup\nabla^n\times(1)$，有扩充映射 $F'':(\nabla^n\times I,S^{n-1}\times I)\to(X,x_0)$。它是连接

f 至 $f'=F''|\nabla^n\times(1)$ 的同伦，而 $f'(\nabla^n)=\widetilde{F}(\nabla^n\times(1))\subseteq A$。

充分性　从引理7.3即可得到.】

现在证明本节主要结论——定理7.1。

（1）叙列（S）在 $\pi_n(A,x_0)$ 处正合（$m\geqslant1$）。由引理7.2易见。

（2）叙列（S）在 $\pi_n(X,x_0)$ 处正合（$n\geqslant1$）。由引理7.4易见。

（3）叙列（S）在 $\pi_n(X,A,x_0)$ 处正合（$n\geqslant1$）。

当 $n\geqslant2$，设 $\alpha=[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$，$f:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$。如果 $d_*(\alpha)=0$，即 $f|S^{n-1}\simeq c:(S^{n-1},p_0)\to(A,x_0)$。由同伦扩充性质，$c$ 有扩充映射 g，使 $f\simeq g:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$。而 $g(S^{n-1})=x_0$，故 $\alpha=j_*[g]$，$[g]\in\pi_n(X,x_0)$；反之，如果 $\alpha=j_*(\beta)$，$\beta=[g]\in\pi_n(X,x_0)$，$g:(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,x_0)$，则有 $d_*(\alpha)=[g|S^{n-1}]=[c]=0\in\pi_{n-1}(A,x_0)$。

当 $n=1$，因 A 是路径连通的，不难看出，$j_*\pi_1(X,x_0)=\pi_1(X,A,x_0)$.】

例7.1　因 $\nabla^m(m>1)$ 是可缩空间，$\pi_n(\nabla^m)=0$，$n>1$，由 (∇^m,S^{m-1}) 同伦叙列的正合性知，$\pi_n(\nabla^m,S^{m-1})\approx\pi_{n-1}(S^{m-1})$。

定理 7.5　设空间偶 (X,A) 与 (Y,B) 是路经连通的，$\chi:(X,A)\to(Y,B)$ 是映射，$x_0\in A$，$y_0=\chi(x_0)$。则 χ 导出 (X,A) 与 (Y,B) 的同伦叙列间的同态。即下述图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\xrightarrow{d_*} & \pi_n(A,x_0) & \xrightarrow{i^*} & \pi_n(X,x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X,A,x_0) \\
& \downarrow\chi_* & & \downarrow\chi_* & & \downarrow\chi_* \\
\cdots\xrightarrow{d'_*} & \pi_n(B,y_0) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_n(Y,y_0) & \xrightarrow{j'_*} & \pi_n(Y,B,y_0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\text{(接上行)}\xrightarrow{d_*} & \pi_{n-1}(A,x_0) & \xrightarrow{i_*}\cdots\to & \pi_1(X,x_0) \\
& \downarrow\chi_* & & \downarrow\chi_* \\
\text{(接下行)}\xrightarrow{d'_*} & \pi_{n-1}(B,y_0) & \xrightarrow{i'_*}\cdots\to & \pi_1(Y,y_0),\quad n>1.
\end{array}$$

证明根据定义6.2及6.2′是明显的。】

设 x_0 与 $x_1 \in A, \xi=[\sigma] \in \pi(A, x_0, x_1)$。根据定理5.6和4.4，有

$$\xi_*: \pi_n(X, A, x_1) \approx \pi_n(X, A, x_0), \quad n \geqslant 2;$$

$$\xi_*: \pi_n(A, x_1) \approx \pi_n(A, x_0), \qquad n \geqslant 1,$$

记 $i_* \xi=[\sigma] \in \pi(X, x_0, x_1)$，它导出 X 上同伦群的同构，仍记为 $\xi_*: \pi_n(X, x_1) \approx \pi_n(X, x_0)$，$n \geqslant 1$。

于是，明显地有

命题7.6 路径的同伦类 $\xi \in \pi(A, x_0, x_1)$ 导出空间偶 (X, A) 上不同基点 x_0 与 x_1 处的两个同伦叙列间的同态。即下述图表是交换的：$n>1$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{d_*} & \pi_n(A, x_1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_1) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_1) \\
& \downarrow \xi_* & & \downarrow \xi_* & & \downarrow \xi_* \\
\cdots \xrightarrow{d_*} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
(\text{接上行}) \xrightarrow{d_*} & \pi_{n-1}(A, x_1) & \xrightarrow{i_*} \cdots \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\
& \downarrow \xi_* & & \downarrow \xi_* \\
(\text{接下行}) \xrightarrow{d_*} & \pi_{n-1}(A, x_0) & \xrightarrow{i^*} \cdots \longrightarrow & \pi(X, x_0)
\end{array}$$ 。】

特别地，当 $x_1=x_0$ 时，上述图表交换性说明 i_*，j_* 与 d_*是对 $\pi_1(A, x_0)$ 来说的运算同态。

最后，我们叙述 (X, A) 的同伦叙列中 $\pi_2(X, A, x_0)$ 的一个代数性质（原见 J. H. C. Whitehead 的文章 [31]）。

定义 7.2 设群π是 群 Σ 的运算群(定义 4.2)，$d_*: \Sigma \to \pi$ 是群同态。则 Σ 称为**交错** (π, d_*) **模**，如果适合性质：

（1） 对 $\xi \in \pi, a \in \Sigma, d_*(\xi_*(a)) = \xi \cdot d_*(a) \cdot \xi^{-1}$；

（2） 对α、$\beta \in \Sigma, (d_*(\alpha))_*(\beta)=\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1}$。

命题7.7 同伦群 $\pi_2(X, A, x_0)$ 是交错$(\pi_1(A, x_0), d^*)$模，

$x_0 \in A$。

证明　因$\pi_1(A,x_0)$是$\pi_2(X,A,x_0)$上的运算群，及d_*是边沿同态：$\pi_2(X,A,x_0)\to\pi_1(A,x_0)$，只须验证定义7.2中的性质(1)与(2)：

(1) 对任意$\xi\in\pi_1(A,x_0)$，由命题7.6得知图表

$$\begin{array}{ccc}\pi_2(X,A,x_0) & \xrightarrow{d_*} & \pi_1(A,x_0)\\ \downarrow\xi_* & & \downarrow\xi_*\\ \pi_2(X,A,x_0) & \xrightarrow{d_*} & \pi_1(A,x_0)\end{array}$$

是交换的。于是，对$\alpha\in\pi_2(X,A,x^0)$，有

$$d_*\xi_*(\alpha)=\xi_*(d_*(\alpha))=\xi d_*(\alpha)\cdot\xi^{-1}\text{(定理4.5)}.$$

(2) 设$\alpha=[f]$，$\beta=[g]$，$\alpha\cdot\beta=[h]\in\pi_2(X,A,x_0)$，其中$f$、$g$、$h$：$(\nabla^2,S^1,p_0)\to(X,A,x_0)$，且$f(\nabla^2_-)=x_0=g(\nabla^2_+)$，$h|\nabla^2_+=f|\nabla^2_+$，$h|\nabla^2_-=g|\nabla^2_-$。

记$r_t:\nabla^2\to\nabla^2$是由式

$r_t(t_1,t_2)=(t_1\cos t\pi-t_2\sin t\pi,\ t_1\sin t\pi+t_2\cos t\pi)$，$t\in I$给出的旋转同伦。又记$f'=fr_1$，$g'=gr_1$，$h'=hr_1$。知

$$g'(\nabla^2_-)=x_0=f'(\nabla^2_+),\quad h'|\nabla^2_+=g'|\nabla^2_+,$$

$$h'|\nabla^2_-=f'|\nabla^2_-,\qquad [h']=[g'\cdot f'].$$

令$\sigma(t)=fr_t(p_0)$，$t\in I$，$\xi=[\sigma]\in\pi_1(A,x_0)$。易见$\xi=d_*(\alpha)$，$\xi_*([f'])=\alpha$，$[g']=\beta$。于是

$$\alpha\cdot\beta=[h]=\xi_*([h'])=\xi_*([g']\cdot[f'])$$

$$=\xi_*(\beta\cdot\xi_*^{-1}(\alpha))=\xi_*(\beta)\cdot\alpha.$$

故$(d_*(\alpha))_*(\beta)=\alpha\cdot\beta\cdot\alpha^{-1}$。∎

推论 7.8　$j_*\pi_2(X,x_0)\subseteq C(\pi_2(X,A,x_0))$，这里$C(\pi)$表示群$\pi$的中心。

证明　设$\alpha\in j_*\pi_2(X,x_0)$。因$d_*(\alpha)$是$\pi_1(A,x_0)$的单位元(定理7.1)，故对任意$\beta\in\pi_2(X,A,x_0)$，有

$$\beta=(d_*(\alpha))_*(\beta)=\alpha\cdot\beta\cdot\alpha^{-1}.$$

即$\beta\cdot\alpha=\alpha\cdot\beta$。]

练习 I

1．设X与Y是拓扑空间，$X=X_1\cup X_2$；$h_i:X_i\to Y$是映射，$i=1,2$，且$h_1|X_1\cup X_2=h_2|X_1\cup X_2$。求证：如果$X_1$与$X_2$均是$X$的开子集，则由式

$$h(x)=\begin{cases}h_1(x), & x\in X_1,\\ h_2(x), & x\in X_2\end{cases}$$

给出映射$h:X\to Y$。

并举例说明，当X_1与X_2不都是X的开子集时，上式不一定给出映射$h:X\to Y$。

2．设S^n是E^{n+1}中的n维（单位）球。命$f_i:S^n\to S^n$为映射，使$f_i(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})=(t'_1,t'_2,\cdots,t'_{n+1})$，$t'_i=-t_i$，$t'_j=t_j(j\neq i)$，$1\leqslant i\leqslant n+1$。证明：对于任意$i$与$j$，有$f_i\simeq f_j:S^n\to S^n$。

3．设K是连通的有限（单纯）复形，证明$|K|$是路径连通的。

设$X=\{(t_1,t_2)\in E^2\mid t_1>0$ 且 $t_2=\sin\frac{1}{t_1}$ 或 $t_1=0$，且$-1\leqslant t_2\leqslant 1\}$，证明$X$是连通的，但不是路径连通的。

4．证明任一可缩空间的收缩核是可缩的。

5．设K是连通的有限（单纯）复形，$e=v_1v_2$称为K的基本棱道。如果v_1与v_2是K的某单形的顶点，v_1与v_2分别叫作e的起点与终点。$e^{-1}=v_2v_1$称为e的逆棱道。K中的棱道是指有限个基本棱道的联结$\omega=e_1e_2\cdots e_k$，如果e_i的终点是e_{i+1}的起点$(1\leqslant i<k)$。

对$\omega=e_1e_2,\cdots e_k$，$\omega'=e'_1e'_2\cdots e'_m$，$e_k$的终点是$e'_1$的起点，则命$\omega\cdot\omega'=e_1e_2\cdots e_ke'_1e'_2\cdots e'_m$，称为棱道$\omega$与$\omega'$的乘积；$\omega^{-1}=e_k^{-1}\cdots e_2^{-1}e_1^{-1}$，称为$\omega$的逆棱道。

在K上所有棱道的集合中，定义关系“$\sim$”：设$e=v_1v_2$，$e'=v_2v_3$，如果v_1、v_2与v_3是K中某单形的顶点，记$ee'\sim v_1v_3$，称为棱道的“缩减关系”。

一般地，$\omega\sim\omega'$，如果ω可经过有限次上述基本棱道的“缩减关系”或其逆关系化为ω'。

证明：(i)“$\sim$”是等价关系；

(ii) 记$E(K,v_0)$是K中以v_0为起点与终点的所有闭棱道的等价类集合，则$E(K, v_0)$对棱道乘法所导出的类的乘法(须验证)，组成一个群，称为K在v_0处的棱道群。

(iii) $E(K,v_0)\approx\pi_1(|K|,v_0)$。

6. 证明：路径连通空间X是单连通的，当且仅当，对任意$x_0,x_1\in X,\sigma,\tau\in(X,x_0,x_1)^{(I,(0),(1))}$，都有

$$\sigma\simeq\tau:(I,(0),(1))\to(X,x_0,x_1).$$

7. 拓扑空间X称为**双正规的**，如果$X\times I$是正规空间。证明：设A是双正规空间X的闭子集，则(X,A)对任一(有限)可剖空间Y具有同伦扩充性质。即对任意映射$f:X\to Y$及部份同伦$H:A\times I\to Y$，$H(u,0)=f(u),u\in A$，则存在同伦$F:X\times I\to Y$，使得$F(u,0)=f(u),u\in X$，$F(u,t)=H(u,t)$，$u\in A$。

8. 设空间偶(X,A)是路径连通的，$x_0\in A$。试证

(1) 如果(X, A)是2-单式，则$\pi_2(X, A, x_0)$是交换群；

(2) 如果$i_*\pi_1(A,x_0)=1$(单位元)，且$\pi_2(x,A,x_0)$是交换群，则(X,A)是2-单式的；

(3) 证明定理5.8。

9. 证明：S^n到自身的恒同映射与常值映射不同伦。

10. 设K是连通的有限(单纯)复形，K^m是其m维骨架，$m\geq1$；$i:|K^m|\to|K|$是包含映射，$x_0\in|K^m|$。证明

(1) $i_*:\pi_m(|K^m|,x_0)\to\pi_m(|K|,x_0)$是在上同态；

（2） $i_*:\pi_n(|K^m|,x_0)\approx\pi_n(|K|,x_0)$，$1\leqslant n<m$。

11. 设K是连通的m维有限（单纯）复形，σ^m是K的一个m维单形，L是K的子复形$K-\sigma^m$，及$x_0\in|L|$。证明：当$1\leqslant n<m$，$\pi_n(|K|,|L|,x_0)=0$。

12. 设(X,A)是路径连通空间偶，且对某$q\geqslant 2$，知$\pi_q(X,A)=0$，则对任意映射$\eta:(\sigma^q\times(0)\cup\partial\sigma^q\times I,\partial\sigma^q\times(1))\to(X,A)$，总可扩充为映射$\xi:\sigma^q\times I\to X$，使$\xi(\sigma^q\times(1))\subseteq A$，这里$\sigma^q$为$q$维单形。

13. 设A是X的子空间，$x_0\in A$，证明：$i_*\pi_1(A,x_0)$是$j_*\pi_2(X,x_0)$上的运算群。

14. 设(X,A)是路径连通空间偶，$x_0\in A$。如果已知$\pi_2(A,x_0)\approx J$，$\pi_2(X,A,x_0)\approx J_2$，问群$\pi_2(X,x_0)$有哪些可能的结构？

15. 任给$(p,p_0)\in S^n\times S^1,n\geqslant 1$，记

$$S^n\vee S^1=S^n\times(p_0)\cup(p)\times S^1.$$

证明：路径连通空间X是n-单式的，当且仅当每一个映射：$S^n\vee S^1\to X$可扩充至映射：$S^n\times S^1\to X$。

16. 把S^1看作复数平面内的单位圆，借用复数乘法证明S^1是n-单式的，$n\geqslant 1$。

17. 证明：$S^n\vee S^1$（定义同上）不是$S^n\times S^1$的收缩核，从而$S^n\vee S^1$不是n-单式的。特别地，$\pi_1(S^1\vee S^1)$不是交换群。

18. 对每一个$n\geqslant 2$，举出一个非n-单式的路径连通空间偶的例子。

第二章　同伦群的若干性质

〔内容提要〕

同伦群、相对同伦群及其伦型不变性（因而是拓扑不变量）等已如上述。然而，对于给定的拓扑空间与空间偶，计算它的同伦群与相对同伦群却是非常困难的问题。即使是可剖分空间，甚至像 S^n 这样简单的空间，其同伦群的计算至今解决得不多（参看Ⅵ. §6）。

本章中将包括同伦论发展史上几个比较重要的定理，它们大多与同伦群的计算有过密切的关系。

§1　作为预备，回顾了拓扑空间的广义同调群的概念和性质。

§2　叙述并证明了同伦可加定理。这使我们能够进而研究空间的同伦群与同调群的初步较深入的关系。在 §3 中，引入了空间的同伦群 $\pi_n(X)$ 到它的（广义）同调群 $H_n(X)$ 的自然同态，及证明了 Hurewicz 定理。

§4　为建立同构：$\pi_n(S^n)\approx J$，引入拓扑度这个在许多其它数学领域非常有用的概念。$n=1$时采取的方法为第四章的讨论提供了背景和例子。

§5　是空间偶 (X, A) 的同伦群与同调群关系的叙述，主要是相对 Hurewicz 定理。

§6　运用映射柱形的概念及 §3、§5 的 Hurewicz 定理，解决了有限多面体同伦型的充分必要条件这个重要事实。但我们没有讨论 J. H. C. Whitehead 所给的，对于 CW-复形这个在较广泛的情形下的定理（见[2]第七章或[31]）。

§7　叙述了几个计算同伦群时常用的直和分解定理，其主要

依据是 I．§7 的同伦正合叙列。

§9 介绍的 Freudenthal 同纬像定理是同伦论历史上起过重要影响的定理，它揭示了同伦论与同调论的部份本质区别，也是 S^n 等空间同伦群计算的强有力工具。§8中叙述的三联组(X，A，B）的同伦群，在某种意义下可用来估计截去性质在同伦群中成立的限度，同时为 §9 的讨论作了准备。

最后，§10叙述的 J．H．C．Whitehead 乘积是最重要的同伦运算之一，它给出空间 X 上同伦群 $\pi_p(X)$，$\pi_q(X)$ 与 $\pi_{p+q-1}(X)$ 之间的一个联系，并常常直接用于计算一些同伦群。

§1 拓扑空间的同调群

在[1]中，详细讨论了有限多面体的同调论，它有着明显的几何背景，具体计算也较为容易（看该书92页说明的理由）．本节将把对多面体的讨论推广到一般拓扑空间，得到广义同调群(亦称奇异同调群)． 但是， 我们仅限于介绍以后会涉及到的最简单概念和性质，略去许多证明的细节．有兴趣的读者可直接查阅[3]或 1944 年 S．Eilenberg 的文章[13]。

定义1.1 设$\triangle^q$ 是欧氏空间 $E^n(0\leqslant q\leqslant n)$ 中的 q 维单形，如果将其顶点 v_0，v_1，…，v_q 指定一个顺序 $v_0<v_1<\cdots<v_q$，则$\triangle^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$称为 q 维**有序单形**。

设X是拓扑空间，$T^q=(\xi，\triangle^q)$ 称为X上的 q 维**广义单形**，其中 $\triangle^q$ 为 q 维有序单形，$\xi:\triangle^q\to X$ 为一个映射。

X 上两个 q 维广义单形 $T^q_1=(\xi_1，\triangle^q_1)$ 与 $T^q_2=(\xi_2，\triangle^q_2)$ 称为相等，如果 $l:\triangle^q_1\to\triangle^q_2$ 是保持顶点顺序的(唯一)线性同胚，使 $\xi_1=\xi_2 l$． 记 $T^q_1=T^q_2$。

$S(X)=\{T^q=(\xi，\triangle^q)\,|\,q=0，1，2，\cdots\}$，即所有广义单形的集合，称为$X$的**广义复形**。

附记 实际上，广义单形的“相等”是一个等价关系，

在每一类中均可选取 $T^q=(\xi,\triangle^q)$ 作为代表，其中 $\triangle^q=\langle e^0e^1\cdots e^q\rangle$ 是一固定的标准有序的自然单形。这样有时是方便的。

例1.1　设X是拓扑空间，X的 0 维广义单形是指 $T^0=(\xi,\triangle^0)$，$\xi:\triangle^0=\langle v_0\rangle\to X$，它与 X 的点 $\xi(v_0)$ 成一一对应；X的一维广义单形是指 $T^1=(\xi,\triangle^1)$，$\xi:\triangle^1=\langle v_0v_1\rangle\to X$，它与$X$上的路径 $\sigma:I\to X$ 成一一对应。

定义1.2　设 $T_i^q=(\xi_i,\triangle_i^q)$ 是空间X中的 q 维广义单形，$q\geqslant 0$。记 $c_q=\sum\limits_i\lambda_iT_i^q$，其中 λ_i 是整数,除有限个不为零外余均为零，则 c_q 称为X上 q 维广义链。

设 $c_q=\sum\limits_i\lambda_iT_i^q$，$c_q'=\sum\limits_i\lambda_i'T_i^q$ 是两个 q 维广义链。命 $c_q+c_q'=\sum\limits_i(\lambda_i+\lambda_i')T_i^q$。易见$X$上的全体 q 维广义链对运算"+"组成一个群，称为X的 q 维广义链群，记为 $C_q(S(X))$.亦即以X的全体 q 维广义单形为基所生成的自由交换群．特别地，取 $C_{-1}(S(X))=0$。

定义1.3　设 $T^q=(\xi,\triangle^q)\in C_q(S(X))$，$\triangle^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$. 我们定义

$$\partial T^q=\sum_{i=0}^q(-1)^i(\xi,\triangle_i^{q-1})\in C_{q-1}(S(X)),\qquad q>0,$$

其中 $\triangle_i^{q-1}=\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_q\rangle$,$\xi$ 是 T^q 中映射 ξ 限制在 $\triangle_i^{q-1}$ 上的映射（以下同）．作线性扩充，得到边沿同态

$$\partial:C_q(S(X))\to C_{q-1}(S(X)),\qquad q>0.$$

对于 $q=0$，取 $\partial C_0(S(X))=0$。

命题1.1　$\partial\partial=0$。

证明　对 $T^q=(\xi,\triangle^q)\in C_q(S(X))$，$\triangle^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$，仿照[1]引理Ⅲ.2.1的证明，再作线性扩充即得。　▌

定义1.4 设X是拓扑空间，$q\geqslant 0$。记

$Z_q(S(X))$ 为 $\partial: C_q(S(X))\to C_{q-1}(S(X))$的核；

$B_q(S(X))$ 为 $\partial: C_{q+1}(S(X))\to C_q(S(X))$的像。

又知 $B_q(S(X))\subseteq Z_q(S(X))$。命

$$H_q(S(X))=\frac{Z_q(S(X))}{B_q(S(X))}.$$

于是分别称 $Z_q(S(X))$，$B_q(S(X))$，$H_q(S(X))$ 为 X的q维广义闭链群、q维广义边沿链群、q维**广义同调群**。

设 $f: X\to Y$ 是映射。显然，由下式

$$f\left(\sum_i \lambda_i(\xi_i,\ \triangle_i^q)\right)=\sum_i \lambda_i(f\xi_i,\triangle_i^q)$$

给出同态

$$f: C_q(S(X))\to C_q(S(Y)).$$

且有下面的命题。

命题1.2 $\partial f=f\partial$.

证明 对 $(\xi,\triangle^q)\in C_q(S(X))$，$\triangle^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$，$q>0$，有

$$(\partial f)(\xi,\triangle^q)=\partial(f\xi,\triangle^q)=\sum_i(-1)^i(f\xi,\triangle_i^q)$$

$$=f\left(\sum_i\ (-1)^i(\xi,\ \triangle_i^q)\right)=(f\partial)(\xi,\triangle^q),$$

其中$\triangle_i^q=\langle v_0\cdots \hat{v}_i\cdots v_q\rangle$。

当$q=0$时显然成立。 ∎

可见

$$\left.\begin{aligned}f(Z_q(S(X)))\subseteq Z_q(S(Y)),\\ f(B_q(S(X)))\subseteq B_q(S(Y)),\end{aligned}\right.\qquad q\geqslant 0.$$

定义1.5 设$f: X\to Y$是映射。对$z_q\in Z_q(S(X))$，$q\geqslant 0$，

命$f_*[z_q]=[f(z_q)]$，得到同态

$$f_*:H_q(S(X))\to H_q(S(Y)).$$

称为由映射 f 诱导出的同态。

命题1.3　（1）设 $1:X\to X$ 是恒同映射，则 1_* 是 $H_q(S(X))$ 到自身的恒同同构；

（2）设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 是映射，则有 $(gf)_*=g_*f_*$。

证明　显然。 】

定理1.4　设 $f:X\to Y$ 是同胚映射，则 $f_*:H_q(S(X))\approx H_q(S(Y))$，$q\geqslant 0$。即广义同调群是拓扑不变量。

证明　因 f 是同胚映射，知 $f^{-1}f:X\to X$，$ff^{-1}:Y\to Y$ 分别是 X 与 Y 上恒同映射。根据命题1.3，$f_*^{-1}f_*$ 与 $f_*f_*^{-1}$ 分别是 $H_q(S(X))$ 与 $H_q(S(Y))$ 上恒同同构，故

$$f_*:H_q(S(X))\approx H_q(S(Y)),\qquad q\geqslant 0. \text{】}$$

附记　与有限多面体的情形比较（见[1]定理Ⅳ.5.10），广义同调群的拓扑不变性差不多是定义的直接推论，这是采用它的一个优点。

命题1.5　设 $f\simeq g:X\to Y$，则 $f_*=g_*:H_q(S(X))\to H_q(S(Y))$，$q\geqslant 0$。

证明　设$\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$是 q 维有序单形。记 $\Gamma=\sigma^q\times I$，v_i' 与 $v_i''\in\Gamma$，使 $v_i'=(v_i,\ 0)$，$v_i''=(v_i,\ 1)$。易见 $v_0'\cdots v_{i-1}'v_i'v_i''v_{i+1}''\cdots v_q''$在 Γ 中张成 $(q+1)$ 维单形。

命 $E(\sigma^q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\langle v_0'\cdots v_i'v_i''v_{i+1}''\cdots v_q''\rangle\in C_{q+1}(S(\Gamma))$，

称为 σ^q 上的柱形。容易验证边沿公式

$$\partial E(\sigma^q)=\langle v_0''v_1''\cdots v_q''\rangle-\langle v_0'v_1'\cdots v_q'\rangle$$

$$-\sum_{i=0}^{q}(-1)^iE(\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_q\rangle)$$

成立。

又设 $F:X\times I\to Y$ 是连接 f 到 g 的同伦.对于 $T^q=(\xi,\ \sigma^q)\in S(X)$,令 $\bar{\xi}:\sigma^q\times I\to X\times I$,使得 $\bar{\xi}(u,\ t)=(\xi(u),t)$。则映射 f 与 g 给出链映射 f 与 $g:C_q(S(X))\to C_q(S(Y))$ (命题1.2)。易见有 $f(T^q)=(f\xi,\ \sigma^q)=(F\bar{\xi},\ \langle v_0'v_1'\cdots v_q'\rangle),g(T^q)=(g\xi,\ \sigma^q)=(F\bar{\xi},\ \langle v_0''v_1''\cdots v_q''\rangle)$。

命 $D:C_q(S(X))\to C_{q+1}(S(Y))$ 为同态,使得

$$D(T^q)=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j(F\bar{\xi},\ \langle v_0'\cdots v_{j-1}'v_j'v_{j+1}''\cdots v_q''\rangle).$$

则知 $\partial D(T^q)=f(T^q)-g(T^q)-D\partial(T^q)$(由边沿公式),故 f 与 q 链同伦,即 $f_*=q_*$。 】

定理1.6 设 $f:X\to Y$ 是同伦等价映射,则 $f_*:H_q(S(X))\approx H_q(S(Y))$,$q\geqslant0$。即广义同调群亦是空间的伦型不变量。

证明 设 $g:Y\to X$ 为映射,使 $gf\simeq1_X$,$fg\simeq1_Y$。依照命题1.3与1.5,知 $g_*f_*=1_{X*}$,$f_*g_*=1_{Y*}$,1_{X*},1_{Y*} 为恒同同构。故 $f_*:H_q(S(X))\approx H_q(S(Y))$,$q\geqslant0$。 】

定理1.7 设K是有限(单纯)复形,则$H_q(K,J)\approx H_q(S(|K|))$,$q\geqslant0$。

即在有限多面体的情形,广义同调群与单纯同调群是一致的.

证明 见附录A。 】

类似地,我们简述广义相对同调群。

设 $(X,\ A)$ 是拓扑空间偶,知 $C_q(S(A))$ 是 $C_q(S(X))$ 的子群,且为直加项。命 $C_q(S(X,\ A))=\dfrac{C_q(S(X))}{C_q(S(A))}$,$q\geqslant0$,称为空间偶 $(X,\ A)$ 的 q 维广义相对链群(自由交换群)。易见 $C_q(S(X))$ 上的边沿同态 ∂ 诱导出 $C_q(S(X,A))$ 上的边沿同态 $\tilde{\partial}:C_q(S(X,\ A))\to C_{q-1}(S(X,\ A))$,$q\geqslant0$,且 $\tilde{\partial}\tilde{\partial}=0$。于是有

$Z_q(S(X,A))=\tilde{\partial}:C_q(S(X,\ A))\to C_{q-1}(S(X,A))$的核;

$$B_q(S(X,A)) = \widetilde{\partial} C_{q+1}(S(X,A));$$

$$H_q(S(X,A)) = \frac{Z_q(S(X,A))}{B_q(S(X,A))}, \quad q \geqslant 0.$$

分别称为（X，A）的q维广义相对闭链群、边沿链群、同调群。

设$f:(X, A) \to (Y, B)$是映射。根据定义1.5，不难看出f诱导出同态

$$f_*: H_q(S(X,A)) \to H_q(S(Y,B)), \qquad q \geqslant 0.$$

由此可以证明，广义相对同调群$H_q(S(X,A))$是拓扑不变量与伦型不变量。并且当（K，L）为有限复形偶时，

$$H_q(K,L;\ J) \approx H_q(S(|K|,\ |L|)), \quad q \geqslant 0.$$

此外，与单纯同调论一致，广义同调群$H_q(S(A))$，$H_q(S(X))$，$H_q(S(X,\ A))$等组成的同调叙列是正合的。

附记1 在以后不致引起混淆时，我们简记$H_q(X)$与$H_q(X,\ A)$为空间X和空间偶（X，A）的广义同调群、广义相对同调群。

附记2 上面我们仅叙述了整系数的情形，不难把它推广到一般交换群作为系数群的情形。相应地，也有广义上同调群与广义相对上同调群等，一并从略。

§2 同伦可加定理与复形 $S_n(X)$

同伦可加定理在将要建立的同伦群与同调群之间的自然同态，以及在证明 Hurewicz 同构定理中都起了重要的作用.阅读本节时，可参看 Eilenberg [12]及胡世桢的文章[22]。

设在欧氏空间E^{n+1}中，以原点为内点的$(n+1)$维单形$\triangle^{n+1}$的边沿复形为K. p_0是K的顶点，记K中的n维单形为σ_i^n，$n=$

0，1，…，$n+1$。在从原点作中心投射得出的同胚意义下，$|K|=S^n$（于是 S^n 有单纯剖分），从而可表

$$S^n=\sigma_0^n\cup\sigma_1^n\cup\cdots\cup\sigma_{n+1}^n.$$

假设X是路径连通空间，$x_0\in X$，$f:(S^n,|K^{n-1}|)\to(X,x_0)$是映射，$K^{n-1}$表示$K$的$(n-1)$维骨架。命$f_{\sigma_i^n}:(S^n,|K^{n-1}|)\to(X,x_0)$是由式

$$f_{\sigma_i^n}(u)=\begin{cases}f(u), & u\in\sigma_i^n,\\ x_0, & u\in S^n-\mathrm{Int}\,\sigma_i^n\end{cases}$$

给出的映射，$i=0,1,\cdots,n+1$。

下面就是**同伦可加定理**。

定理2.1　设$n\geqslant 2$或$n=1$，但X是1-单式的，则

$$[f]=\sum_{i=0}^{n+1}[f_{\sigma_i^n}]\in\pi_n(X,x_0).$$

证明　命$f_j:(S^n,|K^{n-1}|)\to(X,x_0)$为映射，$0\leqslant j\leqslant n+1$，使得

$$f_j(u)=\begin{cases}f(u), & u\in\sigma_0^n\cup\sigma_1^n\cup\cdots\cup\sigma_j^n,\\ x_0, & u\in\sigma_{j+1}^n\cup\cdots\cup\sigma_{n+1}^n.\end{cases}$$

易见$f_0=f_{\sigma_0^n}$，$f_{n+1}=f$。

欲证定理，只须验证

$$[f_{j+1}]=[f_j]+[f_{\sigma_{j+1}^n}],\quad 0\leqslant j<n+1.\qquad(*)$$

事实上，简记$\sigma=\sigma_{j+1}^n$，$D=S^n-\mathrm{Int}\,\sigma$，$f_\sigma=f_{\sigma_{j+1}^n}$。知

$$f_j(\sigma)=x_0=f_\sigma(D),\quad f_{j+1}|D=f_j|D,\quad f_{j+1}|\sigma=f_\sigma|\sigma.$$

我们再命$\varphi:S^n\to S^n$是（同胚）映射，使得

$$\varphi(S_+^n)=\sigma,\quad \varphi(S_-^n)=D,$$

且存在连接φ至恒同映射1_{S^n}的（形变）同伦$F:S^n\times I\to S^n$。根据定义Ⅰ.3.1，有

$$[f_{j+1}\varphi]=[f_j\varphi]+[f_\sigma\varphi].$$

记$\sigma:I\to S^n$为映射，使$\sigma(t)=F(p_0,t)$，$t\in I$。并令

$$u=\sigma(0)=\varphi(p_0)\in|K^{n-1}|$$

当 $n\geqslant 2$，因 $|K^{n-1}|$ 是路径连通的，有映射 $\tau:(I,(0),(1))\to(S^n,u,p_0)$，$\tau(I)\subseteq|K^{n-1}|$。利用单纯逼近方法知 $\tau\simeq\sigma:(I,(0),(1))\to(S^n,u,p_0)$，从而 $c=f_j\tau\simeq f_j\sigma:(I,\partial I)\to(X,x_0)$，其中 c 是常值映射。于是 $G=f_jF:S^n\times I\to X$ 是连接 $f_j\varphi$ 至 f_j 的同伦映射，且 $[f_j\sigma]=[c]=\iota\in\pi_1(X,x_0)$ 是单位元，故

$$[f_j\varphi]=[f_j]\in\pi_n(X,x_0)\text{（见定理 I.4.5）.}$$

同理，亦有 $[f_\sigma\varphi]=[f_\sigma]$，$[f_{j+1}\varphi]=[f_{j+1}]$。因此，在 $n\geqslant 2$ 时（*）成立。

当 $n=1$，因 X 是1-单式的，易见（*）亦成立（见定理 I.4.8）.】

不难验证，当 $n=1$ 且 X 不一定是 1-单式时，有下面命题。

命题2.2　设 $f:(S^1,|K^0|)\to(X,x_0)$ 是映射，$f_{\sigma_i^n}$ 如上所述 $(i=0,1,2)$，且 σ_0^1，σ_1^1 与 σ_2^1 按反时针排列，p_0 是 σ_0^1 与 σ_2^1 的顶点。则有

$$[f]=[f_{\sigma_0^1}]\cdot[f_{\sigma_1^1}]\cdot[f_{\sigma_2^1}]\in\pi_1(X,x_0)$$

（见图2.1）。】

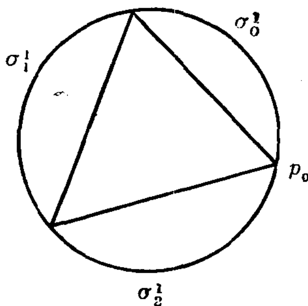


图　2.1

对 $\alpha\in\pi_n(X,x_0)$，$n\geqslant 1$，适合定理 2.1 的代表映射 $f:(S^n,|K^{n-1}|)\to(X,x_0)$ 是存在的。事实上，有

命题2.3　任给 (∇^{n+1},S^n) 的单纯剖分 (K_1,K)。设 $f:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$ 是映射，则有

$$f\simeq f':(S^n,p_0)\to(X,x_0),$$

使 $f'(|K^{n-1}|)=x_0$；进一步又设 f' 可扩充至映射 $g:\nabla^{n+1}\to X$，则 f' 可扩充至 $g':\nabla^{n+1}\to X$，使 $g'(|K_1^{n-1}|)=x_0$。

证明　首先，取 $p\in S^n$，$p\overline{\in}|K^{n-1}|$。因 $S^n-(p)$ 与可缩空间 E^n 同胚，存在 $|K^{n-1}|$ 在 S^n 中的（形变）同伦 $\eta_t:(|K^{n-1}|,$

$p_0)\to(S^n,p_0)$，$t\in I$，使 η_0 是包含映射，$\eta_1(|K^{n-1}|)=p_0$。于是 $f\eta_t:(|K^{n-1}|,p_0)\to(X,x_0)$ 是连接 $f||K^{n-1}|$ 至 $f\eta_1$ 的同伦，而 $f\eta_1(|K^{n-1}|)=x_0$；由同伦扩充性质（命题Ⅰ.4.3），有 f' 是 $f\eta_1$ 在 S^n 上的扩充，且 $f\simeq f':(S^n,p_0)\to(X,x_0)$。

其次，如 g 是 f' 在 ∇^{n+1} 上的扩充。因 $|K_1^{n-1}|$ 在 $\triangle^{n+1}$ 中有（形变）同伦 $\xi_t:|K_1^{n-1}|\to\nabla^{n+1}$，使 ξ_0 是包含映射，$\xi_1(|K_1^{n-1}|)\subseteq|K^{n-1}|$，且 $\xi_t||K|$ 是恒同映射，$t\in I$（通过 ∇^{n+1} 中适当内点作投射及单纯逼近方法等），于是根据同伦扩充性质，有 ξ_1 的扩充映射 $\xi:\nabla^{n+1}\to\nabla^{n+1}$，再取 $g'=g\xi:\nabla^{n+1}\to X$，即得到命题的结论。】

为了讨论同伦群与同调群的关系，我们需要考虑广义复形 $S(X)$ 的子复形 $S_n(X)$，$n\geqslant1$。

设 $\triangle^q$ 是 q 维有序单形，$\triangle^{q,n-1}$ 表示 $\triangle^q$ 的 $(n-1)$ 维骨架。如考虑映射 $\xi:(\triangle^q,|\triangle^{q,n-1}|)\to(X,x_0)$，及 q 维广义单形 $T^q=(\xi,\triangle^q)$，所有如此的广义单形组成 $S(X)$ 的子复形 $S_n(X,x_0)$，简记 $S_n(X)$，称为 $S(X)$ 的第 n 个 **Eilenberg 子复形**（可参看[13]）。其意义见下节定理3.2. 特别地，命 $S_0(X)=S(X)$，于是

$$S(X)=S_0(X)\supseteq S_1(X)\supseteq\cdots\supseteq S_n(X)\supseteq\cdots.$$

例如，当 $0\leqslant q<n$，则 $S_n(X)$ 中有唯一的 q 维广义单形 $T^q=(c,\triangle^q)$，其中 $c:\triangle^q\to X$ 是常值映射 $c(\triangle^q)=x_0$。

命 $C_q(S_n(X))=\{c_q=\sum\limits_i\lambda_iT_i^q|T_i^q\in S_n(X)\}$，即由一切 $T^q\in S_n(X)$ 为基所生成的自由交换群。易见，对 $S(X)$ 上的边沿运算 ∂，有

$$\partial C_q(S_n(X))\subseteq C_{q-1}(S_n(X)).$$

于是，相应地有 $S_n(X)$ 上 q 维闭链群 $Z_q(S_n(X))$，q 维边沿链群 $B_q(S_n(X))$ 及 q 维同调群 $H_q(S_n(X))$，$q=0,1,\cdots$ 等。

按照定义，当 $1\leqslant q<n$，有 $Z_q(S_n(X))=B_q(S_n(X))$，故知

$H_q(S_n(X))=0$，而$H_0(S_n(X))\approx J$。至于$H_n(S_n(X))$，正是它与空间X(在x_0处)的n维同伦群有密切关系（见定理3.2）。

从定理2.1的证明过程可以见到，对于$T^n\in S_n(X)$，自然地联系元素$[T^n]\in\pi_n(X,x_0)$。为此，我们需先给出空间E^{n+1}的定向概念。

定义2.1 设 $\triangle_1^{n+1}=\langle Oa_1a_2\cdots a_{n+1}\rangle$、$\triangle_2^{n+1}=\langle Ob_1b_2\cdots b_{n+1}\rangle$是$E^{n+1}$中两个$(n+1)$维有序单形，其中$O$是原点.明显地，有唯一的线性变换矩阵$P$，使$a_i=b_iP$，及行列式$|P|\neq0$。当$|P|>0$，称$\triangle_1^{n+1}$与$\triangle_2^{n+1}$同向；否则称为反向。

“同向”概念是一个等价关系。于是，E^{n+1}中所有$(n+1)$维有序单形按是否同向分为两类，每一类都称为E^{n+1}的一个定向。为确定起见，以下对每个$i=1,2,\cdots,n+1$，设$e_i=(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})\in E^{n+1}$，其中$t_i=1$，$t_j=0(j\neq i)$。于是取$E^{n+1}$一个定向，使得$\langle Oe_1e_2\cdots e_{n+1}\rangle$在这个定向中。

记$r:E^{n+1}-(0)\to S^n$为映射，使得$r(u)=\dfrac{u}{\|u\|}$，$u\in E^{n+1}-(0)$，即r为中心投射。

定义2.2 设$T^n=(\xi,\triangle^n)\in S_n(X)$，$n\geqslant1$，且其中$\triangle^n$在$E^{n+1}$中与$O$张成一个$(n+1)$维单形，使$O\triangle^n$与$E^{n+1}$的定向相同，$p_0\overline{\in}$ Int $O\triangle^n$。由于映射r将$\triangle^n$同胚映至S^n的一个子集，命$\xi_\#:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$为下式

$$\xi_\#(u)=\begin{cases}\xi(u'), & u'\in\triangle^n,\quad u=r(u'),\\ x_0, & \text{其余 } u\in S^n\end{cases}$$

所给出的映射。我们定义

$$[T^n]=[\xi_\#]\in\pi_n(X).$$

定义2.2的一意性是由于有

命题2.4 对于$T^n=(\xi,\triangle^n)\in S_n(X)$，$[T^n]$与适合定义2.2中要求的$\triangle^n$选取无关。

证明的方法主要借助于代数知识，留在本节末作附记。】

命题2.5　设 $T^n=(\eta,\sigma^n)\in S_n(X), n\geqslant 1$，且其中 σ^n 在 E^{n+1} 中与 O 张成一个 $(n+1)$ 维单形，$p_0\overline{\in}\ \mathrm{Int}\, O\sigma^n$。仿照定义2.2有 $\eta_\#:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$ 为映射，

$$\eta_\#(u)=\begin{cases}\eta(u'), & u'\in\sigma^n,\ u=r(u'),\\ x_0, & \text{其余 } u\in S^n.\end{cases}$$

则

$$[\eta_\#]=\begin{cases}[T^n], & \text{当} O\sigma^n \text{ 与 } E^{n+1} \text{定向相同},\\ -[T^n], & \text{当} O\sigma^n \text{ 与 } E^{n+1}\text{定向相反}.\end{cases}$$

证明　只须证明定向相反情形。

设 $l:E^{n+1}\to E^{n+1}$ 是 E^{n+1} 中的反射，即对 $u=(t_1,\cdots,t_n,t_{n+1})\in E^{n+1}$，有 $l(u)=(t_1,\cdots,t_n,-t_{n+1})$。记 $\triangle^n=l(\sigma_u)$，知 $O\triangle^n$ 与 E^{n+1} 定向相同，而 $T^n=(\eta l^{-1},\triangle^n)$.依命题2.4，$[T^n]=[(\eta l^{-1})_\#]$。由命题Ⅰ.3.5，知 $[(\eta l^{-1})_\# l]$ 是 $[T^n]$ 的负元素，故 $[\eta_\#]=-[T^n]\in\pi_n(X,x_0)$。 ▌

命题2.6　设 $T^{n+1}=(\eta,\triangle^{n+1})\in S_n(X)$，$\triangle^{n-1}=\langle v_0v_1\cdots v_{n+1}\rangle$，$T_i^n=(\eta,\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_{n+1}\rangle)$ 称为 T^{n+1} 的 i 向面，$i=0,1,\cdots,n+1$。则有：

(1)　$n\geqslant 2$，$\sum\limits_{i=0}^{n+1}(-1)^i[T_i^n]=0\in\pi_n(X,x_0)$；

(2)　$n=1$，$[T_0^1]\cdot[T_1^1]^{-1}\cdot[T_2^1]$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的单位元。

证明　(1) $n\geqslant 2$。不妨设 $\triangle^{n+1}\subset E^{n+1}$，$O\in\mathrm{Int}\,\triangle^{n+1}$，$v_0=p_0$，$\langle Ov_1\cdots v_{n+1}\rangle$ 与 E^{n+1} 同向.记 $\triangle_i^n=\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_{n+1}\rangle$，$\eta_i=\eta|\triangle_i^n$，即 $T_i^n=(\eta_i,\triangle_i^n)$，$i=0,1,\cdots,n+1$。

易见，当 i 是偶数，$O\triangle_i^n$ 与 E^{n+1} 同向；当 i 是奇数，$O\triangle_i^n$ 与 E^{n+1} 反向。由命题2.5，有映射 $\eta_{i\#}:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，使

$$[\eta_{i\#}]=(-1)^i[T_i^n]\in\pi_n(X,x_0),\quad i=0,1,\cdots,n+1.$$

根据定理2.1，有 $[\eta^\#]=\sum\limits_{i=0}^{n+1}[\eta_{i\#}]$，其中 $\eta_\#:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$

是由映射$\eta:\triangle^{n+1}\to X$限制在$\partial\triangle^{n+1}$上决定的。故

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[T_i^n]=[\eta_\#]=0\in\pi_n(X,x_0).$$

(2) $n=1$。同理根据命题 2.5 与 2.2 即可证得。】

附记　设$G=Gl(R,n)$是实数域R上全体n阶 ($n\geqslant1$) 非退化方阵所组成的一般线性群。在G中引进度量ρ：对$P=(a_{ij}),Q=(b_{ij})\in G$，命$\rho(P,Q)=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}-b_{ij}|$。于是$G$成为一个度量空间（且是一个拓扑群）.并且有性质：设$P\in G$，$|P|>0$，则在G中单位方阵P_0可路径连通至P。

事实上，

(1) 设P是正交矩阵（因而是旋转矩阵），即有$P=UTU^{-1}$，其中P的相似标准形为

$$T=\begin{pmatrix}\cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & & & & \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 & & & & \\ & & \cos\beta_2 & -\sin\beta_2 & & \\ & & \sin\beta_2 & \cos\beta_2 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots\ 1\end{pmatrix}$$

（T中未标出部份是零，以下同）.又令

$$T_t=\begin{pmatrix}\cos t\beta_1 & -\sin t\beta_1 & & & & \\ \sin t\beta_1 & \cos t\beta_1 & & & & \\ & & \cos t\beta_2 & -\sin t\beta_2 & & \\ & & \sin t\beta_2 & \cos t\beta_2 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots\ 1\end{pmatrix},\ t\in I.$$

故 $\widetilde{T}_t=UT_tU^{-1}$ 是连接 P_0 至 P 的路径，$t\in I$。

(2) 设 $P\in G$, $|P|>0$。因 $P=QS$，其中 Q 是旋转矩阵，S 是正定对称矩阵。由（1）只须证明有连接 Q 与 P 的路径即可。

因 $S=UDU'$，其中 S 的合同标准形为

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad d_{ii}>0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

记

$$d_{ii}=\exp\rho_i,\quad i=1,2,\cdots,n,\ \text{及}$$

$$D_t=\begin{pmatrix} \exp t\rho_1 & & & \\ & \exp t\rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp t\rho_n \end{pmatrix},$$

$$S_t=UD_tU',\quad t\in I.$$

则 $P_t=QS_t$ 是连接 $P_0=Q$ 至 $P_1=P$ 的路径。

下面是命题 2.4 的证明。

设 $T^n=(\xi,\triangle^n)=(\eta,\sigma^n)\in S_n(X)$，其中 $\triangle^n$ 与 $\sigma^n\in E^{n+1}$；$O\triangle^n$ 与 $O\sigma^n$ 是 $(n+1)$ 维单形，均与 E^{n+1} 同向，$p_0\overline{\in}\,\mathrm{Int}\,O\triangle^n\cup\mathrm{Int}\,O\sigma^n$。记 $\triangle^n=\langle a_0a_1\cdots a_n\rangle$，$\sigma^n=\langle b_0b_1\cdots b_n\rangle$；$p_{\#}$ 是 $(n+1)$ 阶线性变换的矩阵，使得 $a_i=b_iP_{\#}$, $i=0,1,\cdots,n$，且知 $|P_{\#}|>0$。

不妨设 $a_0=p_0=b_0$（见定理 2.1 的证明），由是

$$P_{\#}=\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ p_{21} & \\ \vdots & P \\ p_{n+1\,1} & \end{pmatrix},\quad P\text{ 为 }n\text{ 阶方阵，且 }|P|>0.$$

根据上述性质，有 P_t 连接 P_0 至 P，$t\in I$。命

$$P_{\#t}=\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ p_{21}t & \\ \vdots & P_t \\ p_{n+1\,1}t & \end{pmatrix},\qquad t\in I.$$

及映射 $\varphi_t:(S^n,p_0)\to(S^n,p_0)$，使得 $\varphi_t(u)=\dfrac{uP_{\#t}}{\|uP_{\#t}\|}$。

记 $f_t=\xi_\#\varphi_t:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$ 为连接 $\xi_\#$ 至 $\xi_\#\varphi_1$ 的同伦。根据定义 2.2，$\xi_\#,\eta_\#$ 及 $\eta(v)=\xi(vP_\#)$（广义单形相等的含义），$v\in\sigma^n$，知 $\xi_\#\varphi_1=\eta_\#:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$ 故

$$[\xi_\#]=[T^n]=[\eta_\#]。\rfloor$$

§3 Hurewicz 定理

本节首先讨论 Eilenberg 子复形$S_n(X)$的n维同调群与$\pi_n(X,x_0)$ 的关系（$n\geqslant1$），进而导出同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 到 $H_n(X)=H_n(S(X))$的自然同态。在特别的情形，此同态是同构（定理3.5）。

定义3.1 设 $n\geqslant2$，对于 $c_n=\sum\limits_i\lambda_iT_i^n\in C_n(S_n(X))$，命

$$\kappa(c_n)=\sum_i\lambda_i[T_i^n]\in\pi_n(X,\ x_0)，由此得出同态$$

$$\kappa:c_n(S_n(X))\to\pi_n(X,\ x_0).$$

因 $\kappa:Z_n(S_n(X))\to\pi_n(X,\ x_0)$，$B_n(S_n(X))\subseteq\kappa^{-1}(0)$，故 κ 导出同态 $\kappa_*:H_n(S_n(X))\to\pi_n(X,\ x_0)$。

事实上，设$z_n=\partial c_{n+1}=\sum\limits_j\mu_j\partial T_j^{n+1}$，其中 $c_{n+1}=\sum\limits_j\mu_jT_j^{n+1}\in C_{n+1}(S_n(X))$。根据命题 2.5(1)，有 $\kappa(\partial T_j^{n+1})=0$，因之 $\kappa(z_n)=0$。

为了对$n=1$的情形定义相应的同态，先叙述下面的引理。

引理3.1 设 π 是一抽象群．$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(k)\end{pmatrix}$是 k 元排列．对 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\in\pi$，记

$$a=a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_k,\qquad a'=a_{\tau(1)}\cdot a_{\tau(2)}\cdots\cdot a_{\tau(k)},$$

则 $\alpha^{-1}\cdot\alpha'\in \mathrm{Comm}(\pi)$，这里 $\mathrm{Comm}(\pi)$ 表示群 π 的**换位子群**。

证明　由于$\mathrm{Comm}(\pi)$是π的不变子群，记$\hat{\pi}$为商群$\pi/\mathrm{Comm}(\pi)$及自然同态$\omega:\pi\to\hat{\pi}$。

因$\hat{\pi}$是交换群，有$\omega(\alpha)=\omega(\alpha')$，即$\omega(\alpha^{-1}\cdot\alpha')=1\in\hat{\pi}$（1表示其单位元），故$\alpha^{-1}\cdot\alpha'\in\mathrm{Comm}(\pi)$。】

定义3.2　记$\hat{\pi}_1(X,x_0)=\pi_1(X,x_0)/\mathrm{Comm}(\pi_1(X,x_0))$，及$\omega:\pi_1(X,x_0)\to\hat{\pi}_1(X,x_0)$为自然同态。

对于$c_1=\sum\limits_i\lambda_iT_i^1\in C_1(S_1(X))$，命$\kappa(c_1)=\sum\limits_i\lambda_i\omega([T_i^1])\in\hat{\pi}_1(X,x_0)$（交换群$\hat{\pi}_1(X,x_0)$中运算用加法）。根据引理3.1，定义是一意的。由此得到同态

$$\kappa:C_1(S_1(X))\to\hat{\pi}_1(X,x_0).$$

因$\kappa:Z_1(S_1(X))\to\hat{\pi}_1(X,x_0)$，与定义3.1类似，利用命题2.5(2)，知$\kappa(B_1(S_1(X)))=0$。故$\kappa$导出同态

$$\kappa_*:H_1(S_1(X))\to\hat{\pi}_1(X,x_0).$$

定理3.2　设X是路径连通空间，$x_0\in X$。则

（1）当$n\geqslant2$，$\kappa_*:H_n(S_n(X))\approx\pi_n(X,x_0)$；

（2）当$n=1$，$\kappa_*:H_1(S_1(X))\approx\hat{\pi}_1(X,x_0)$。

证明　（i）同态κ_*的在上性：设$\alpha=[f]\in\pi_n(X,x_0)$，其中$f:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$。取$\sigma^{n+1}=\langle v_0v_1\cdots v_{n+1}\rangle\subset E^{n+1}$，使$p_0=v_0$，$O\in\mathrm{Int}\,\sigma^{n+1}$，且$E^{n+1}$与$\langle Ov_1\cdots v_{n+1}\rangle$定向相同。

记$r:E^{n+1}-(O)\to S^n$为投射，它将$\partial\sigma^{n+1}$同胚映射至S^n上。记K为复形$\partial\sigma^{n+1}$自然给出的S^n的单纯剖分（p_0为顶点）。

根据命题2.3，有$f\simeq f':(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，使$f'(|K^{n-1}|)=x_0$，于是记$T_i^n=(f'r,\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_{n+1}\rangle)\in S_n(X)$，$z_n=\sum\limits_{i=0}^{n+1}(-1)^iT_i^n\in C_n(S_n(X))$。易见$\partial z_n=0$，即$z_n\in Z_n(S_n(X))$，且根据定理2.1和命题2.5，得

当 $n\geqslant 2$, $\alpha=[f']=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[T_i^n]=\kappa(z_n)$;

当 $n=1$, $\omega(\alpha)=\omega([f'])=\omega([T_0^1])-\omega([T_1^1])+\omega([T_2^1])$ $=\kappa(z_1)$。(见命题 2.6 的证明。)

即 κ_* 是在上同态。

(ii) 同态 κ_* 的一一对应性:设

$$z_n=\sum_i\lambda_i(\xi_i,\sigma_i^n)\in Z_n(S_n(x)),\ \kappa(z_n)=0\in\pi_n(X,x_0)$$

(0表示其单位元),欲证 $z_n\in B_n(S_n(X))$。

为此,不妨设 $\lambda_i=\pm 1$ (例如取 σ_i^n 皆为不同的情形)。记有序单形 $\sigma^{n+1}\subset E^{n+1}$ 如(i),且取 $\partial\sigma^{n+1}$ 的"充分细"的单纯剖分 K,使得 z_n 中的各 σ_i^n 是 K 中彼此无公共顶点的不同单形。且设有序单形 $O\sigma_i^n$ 与 E^{n+1} 的定向相同或相反,视 $\lambda_i=1$ 或 -1 而定。由于 K 是可定向流形 $\partial\sigma^{n+1}$ 的单纯剖分,有

$$c_n=\sum_i\lambda_i\sigma_i^n+\sum_j\mu_j\tau_j^n\in Z_n(S(|K|))①.$$

其中 τ_j^n 恰是 K 中除 σ_i^n 外余下的诸 n 维单形, $\mu_j=\pm 1$。

命 $w_n=z_n+z_n'\in C_n(S_n(X))$, 其中 $z_n'=\sum_j\mu_j(c,\ \tau_j^n)\in C_n(S_n(X))$, c 为常值映射, $c(\tau_j^n)=x_0$。因 $\partial z_n=0=\partial w_n$, 知 $\partial z_n'=0$。利用锥形边沿公式 $\partial(Oz_n')=O\partial z_n'+z_n'$ (其中 O 为原点), 有

$$z_n'=\partial\Big(\sum_j\mu_j(c,\ O\tau_j^n)\Big)\in B_n(S_n(X)).$$

再者,记 $\xi:\partial\sigma^{n+1}\to X$ 为映射,使 $\xi|\sigma_i^n=\xi_i$, $\xi|\tau_j^n=c$。当 $n\geqslant 2$,由 $\kappa(w_n)=\kappa(z_n+z_n')=\kappa(z_n)=0\in\pi_n(X,x_0)$ (0表示 $\pi_n(X,x_0)$ 的单位元)。根据定理2.1与命题 2.5, 则 ξ 可扩充至映射 ξ': $\sigma^{n+1}\to X$。显然, 锥形 $K_1=OK$ 是 σ^{n+1} 的一个单纯剖分。根据命题2.3, ξ 可扩充至 $\tilde{\xi}:\sigma^{n+1}\to X$, 使 $\tilde{\xi}(|K_1^{n-1}|)=x_0$。故

---

①参见〔1〕114页

$$c_{n+1}=\sum_i \lambda_i(\widetilde{\xi},O\sigma_i^n)+\sum_j \mu_i(\widetilde{\xi},O\tau_j^n)\in C_{n+1}(S_n(X)).$$

且$\partial C_{n+1}=w_n$，即$w_n\in B_n(S_n(X))$。因之，$z_n=w_n-z_n'\in B_n(S_n(X))$。这就证明了$n\geqslant 2$的情形。

类似可证$n=1$的情形。（细节留给读者，这时自然需考虑到换位子群。）】

附记 在证明（i）κ_*的在上性时，对$\alpha\in\pi_n(X,x_0)$，有$z_n\in Z_n(S_n(X))$，使$\kappa(Z_n)=\alpha$。易见，从α到$[z_n]\in H_n(S_n(X))$导出κ_*的逆同构$\kappa_*^{-1}:\pi_n(X,x_0)\approx H_n(S_n(X))$ $(n\geqslant 2)$ 及$\kappa_*^{-1}:\hat{\pi}_1(X,x_0)\approx H_1(S_1(X))$。

现在进一步讨论空间X的广义同调群与同伦群的关系。

设X是路径连通的，$x_0\in X$。以下简记$\pi_n(X)=\pi_n(X,x_0)$。并对$H_n(S^n)\approx J$，按下述方式规定其生成元$\iota\in H_n(S^n)$：取定$\sigma^{n+1}=\langle v_0v_1\cdots v_{n+1}\rangle\subset E^{n+1}$，使$v_0=p_0$，$O\in \mathrm{Int}\sigma^{n+1}$，且$\langle Ov_1\cdots v_{n+1}\rangle$与$E^{n+1}$定向相同，$r:E^{n+1}-(O)\to S^n$为投射（见定义2.2）。则记$z_n^{(0)}=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(r,\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_{n+1}\rangle)\in Z_n(S(S^n))$，及$\iota=[z_n^{(0)}]\in \mathrm{H}_n(S^n)$是其生成元。

命题3.3 设$\alpha=[f]\in\pi_n(X)$，$f:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$。命$\mathscr{H}:\pi_n(X)\to H_n(X)$，使$\mathscr{H}(\alpha)=f_*(\iota)$，则$\mathscr{H}$是一个同态。

证明 首先，$\mathscr{H}(\alpha)$与α的代表映射f的选取无关。事实上，设$f\simeq g:(S_n,p_0)\to(X,x_0)$，则$f_*=g_*:H_n(S^n)\to H_n(X)$。

其次，由于包含同态$i:C_q(S_n(X))\to C_q(S(X))$是链映射，则导出同态

$$\varepsilon_n:H_q(S_n(X))\to H_q(S(X)),\ q=0,1,2,\cdots.$$

易见，当$n\geqslant 2$，$f_*(\iota)=\varepsilon_n\kappa_*^{-1}(\alpha)\in H_n(X)$，其中$\kappa_*^{-1}$见定理3.2的附记。故$\mathscr{H}=\varepsilon_n\kappa_*^{-1}$是同态。

同理，当$n=1$，有$\mathscr{H}=\varepsilon_1\kappa_*^{-1}\omega$是同态。】

由命题可知：当$n\geqslant 2$，下图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{\mathscr{H}} & H_n(X) \\ & \kappa_*^{-1}\searrow \quad \nearrow\varepsilon_n & \\ & H_n(S_n(X)) & \end{array}$$

当$n=1$，由于$H_1(X)$是交换群，知$\mathscr{H}(\mathrm{Comm}(\pi_1(X)))=0$。故$\mathscr{H}$导出同态$\mathscr{H}:\hat{\pi}_1(X)\to H_1(X)$。此时，下图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}_1(X) & \xrightarrow{\mathscr{H}} & H_1(X) \\ & \kappa_*^{-1}\searrow \quad \nearrow\varepsilon_1 & \\ & H_1(S_1(X)) & \end{array}$$

定义3.3 拓扑空间X称为**0-连通的**，如果X是路径连通的；路径连通空间X称为**m-连通的**$(m\geqslant 1)$，如果$\pi_i(X)=0$，$1\leqslant i\leqslant m$。特别地，1-连通空间即单连通空间（见 I 例4.1）。

命题3.4 设X是$(n-1)$-连通空间，$n\geqslant 1$，则包含同态i: $C_q(S_n(X))\to C_q(S(X))$，$q=0, 1, 2, \cdots$是链等价。因而

$$\varepsilon_n: H_n(S_n(X))\approx H_q(S(X)),\quad q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

证明 设$\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$是$q$维有序单形。记$E(\sigma^q)=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\langle v_0'\cdots v_{j-1}'\ v_j'\ v_j''\ v_{j+1}''\cdots v_q''\rangle\in C_{q+1}(S(\sigma^q\times I))$，其中$v_i'=(v_i,\ 0)$，$v_i''=(v_i,\ 1)$。知

$$\partial E(\sigma^q)=\sigma^q\times(1)-\sigma^q\times(0)$$
$$-\sum_{j=0}^{q}(-1)^jE(\langle v_0\cdots\hat{v}_j\cdots v_q\rangle)\in C_q(S(\sigma^q\times I)).$$

（见命题1.5的证明。）

下面我们对$q\geqslant 0$用归纳法定义同态

$$\theta: C_q(S(X))\to C_q(S_n(X)),\qquad q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$D: C_q(S(X))\to C_{q+1}(S(X)),$$

且具有性质：对$T^q=(\xi,\ \sigma^q)\in S(X)$，有

(i) $\partial\theta(T^q)=\theta\partial(T^q)$，即 θ 是链映射；

(ii) $i\theta(T^q)-T^q=\partial D(T^q)+D\partial(T^q)$。

即 D 是连接 $i\theta$ 至恒同映射的链同伦；

(iii) 当 $T^q\in S_n(X)$，则 $\theta(T^q)=T^q$，即 $\theta|S_n(X)$ 是恒同同态；

(iv) 存在映射 $\tilde{\xi}:\sigma^q\times I\to X$，使 $D(T^q)=\tilde{\xi}_*(E(\sigma^q))$，其中 $\tilde{\xi}_*$ 是由 $\tilde{\xi}$ 导出的链映射：

$$C_{q+1}(S(\sigma^q\times I))\to C_{q+1}(S(X)),$$

且使得

$$T^q=(\tilde{\xi}|\sigma^q\times(0),\sigma^q\times(0)),\ \theta(T^q)=(\tilde{\xi}|\sigma^q\times(0),\sigma^q\times(1));$$

(v) 当 $T^q\in S_n(X)$，$\tilde{\xi}(u,\ t)=\xi(u)$，$u\in\sigma^q$。

事实上，对任意 $x\in X$，由 X 的路径连通性，可取定映射(路径) $c_x:I\to X$，使 $c_x(0)=x$，$c_x(1)=x_0$。特别地，取 c_{x_0} 是常值映射，$C_{x_0}(I)=x_0$。设

$$T^q=(\xi,\ \sigma^q)\in S(X),\qquad \sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle.$$

假设 $q=0$，命

$$\theta(T^0)=(c,\ \langle v_0\rangle)\in C_0(S_n(X)),\qquad c(v_0)=x_0,$$

$$D(T^0)=(\tilde{\xi},\ \langle v_0'v_0''\rangle)\in C_1(S(X)),\ \tilde{\xi}(v_0,t)=c_{\xi(v_0)}(t).$$

容易验证性质(i)—(v)成立。

现在用归纳法假设对 $q-1\ (q\geqslant1)$，θ 与 D 已有定义，且适合性质(i)—(v)。考虑 $T^q=(\xi,\ \sigma^q)\in S(X)$ 的情形。

记 T^q 的 i 向面 $T_i^{q-1}=(\xi_i,\ \sigma_i^{q-1})$，其中 $\sigma_i^{q-1}=\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_q\rangle$，$\xi_i=\xi|\sigma_i^{q-1}$。并记 $\tilde{\xi}_i:\sigma_i^{q-1}\times I\to X$ 是对 T_i^{q-1} 定义的，并适合性质(iv)的映射。我们定义映射 $\tilde{\xi}:\sigma^q\times I\to X$ 如下：如果 $T^q\in S_n(X)$，则命 $\tilde{\xi}(u,\ t)=\xi(u)$，$u\in\sigma^q$。如果 $T^q\overline{\in}S_n(X)$，我们分两种情形讨论：1) 当 $q<n$，命 $\xi':\partial(\sigma^q\times I)\to X$ 为映射，使得对于 $u\in\sigma^q$，有 $\xi'(u,0)=\xi(u)$，$\xi'(\sigma^q\times(1))=x_0$，$\xi'|\sigma_i^{q-1}\times I=\tilde{\xi}_i$。(注意 ξ' 定义中各单形上的接头问题。) 根据命题的

假设$\pi_q(X)=0$, $\partial(\sigma^q\times I)$与$S^q$同胚，故$\xi'$可扩充至映射$\tilde{\xi}:\sigma^q\times I\to X$。 2) 当$q\geqslant n$，由于$\sigma^q\times(0)\cup\partial\sigma^q\times I$是$\sigma^q\times I$的收缩核。运用同伦扩充性质(命题Ⅰ.4.3)，有映射$\tilde{\xi}:\sigma^q\times I\to X$，使得$\tilde{\xi}|\sigma_i^{q-1}\times I=\tilde{\xi}_i$, $\tilde{\xi}(u,0)=\xi(u)$。对于$u\in\sigma^q$，且有$\tilde{\xi}|\sigma^q\times(1)(|(\sigma_i^{q-1}\times I)^{n-1}|)=x_0$。于是定义

$$\theta(T^q)=(\tilde{\xi}|\sigma^q\times(1),\ \sigma^q\times(1)),$$

$$D(T^q)=\tilde{\xi}_*(E(\sigma^q)).$$

不难验证，仍皆适合性质(i)—(v)。归纳步骤完成。】

结合定理3.2及命题3.3后的交换图表，便有刻划空间X的同伦群与同调群之间关系的定理（参看[13]）。

定理3.5(W. Hurewicz)　设X是$(n-1)$-连通空间，$n\geqslant 2$，则

$$\mathscr{H}:\pi_n(X)\approx H_n(X)。】$$

定理3.5′　设X是路径连通空间，则

$$\mathscr{H}:\hat{\pi}_1(X)=\frac{\pi_1(X)}{\mathrm{Comm}(\pi_1(X))}\approx H_1(X)。】$$

附记　注意到

$$S(X)=S_0(X)\supset S_1(X)\supset\cdots\supset S_n(X)\supset S_{n+1}(X)\supset\cdots.$$

仿命题3.4的证明可知：

设$\pi_m(X)=0$, $m\geqslant 1$，则包含同态$i_{m+1,m}:C_q(S_{m+1}(X))\to C_q(S_m(X))$是链等价，$q=0, 1, 2, \cdots$。因而亦导出$\varepsilon_{m+1,m}:H_q(S_{m+1}(X))\approx H_q(S_m(X))$，$q=0, 1, 2\cdots$。特别地，由$i_{m,n}=i_{l,n}\cdot i_{m,l}$，得到

$$\varepsilon_n=\varepsilon_{n,0}:H_q(S_n(X))\approx H_q(S(X)),\ q=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

如果X是$(n-1)$-连通的。

作为定理3.5的一个应用，有

定理3.6　设$X=|K|$是连通的可剖分空间，K是有限复形。如果X是单连通的，且对任意$q>1$, $H_q(X)=0$，则X可缩成一点。

证明 记 $T=X\times I$，$T_n=X\times(0)\cup X\times(1)\cup|K^n|\times I$，$n=0,1,2,\cdots$。命映射 $f_0:X\times(0)\to X$，使得 $f_0(x,0)=x$，$x\in X$；及映射 $f_1:X\times(1)\to X$，使得 $f_1(X\times(1))=x_0$。

下面对 n 用归纳法定义映射 $F_n:T_n\to X$，使得 $F_0|X\times(0)=f_0$，$F_0|X\times(1)=f_1$，$F_{n+1}|T_n=F_n$。因而依 K 的有限性，必有 m，使得 $T_m=T$。故定理成立。事实上，因 X 是路径连通的，对于 $x\in X$，有映射 $c_x:I\to X$，使得 $c_x(0)=x$，$c_x(1)=x_0$。于是有适合要求的 $F_0:T_0\to X$。其次，因 X 是单连通的，对任意一维单形 $\sigma^1\in K$，部份映射 $F_0|\sigma^1\times(0)\cup\sigma^1\times(1)\cup\partial\sigma^1\times I$ 可扩充至映射：$\sigma^1\times I\to X$。于是 F_0 可扩充至适合要求的 $F_1:T_1\to X$。

用归纳法，假设 F_{n-1} 已有定义 $(n\geqslant 2)$。由于 $H_q(X)=0$，$q>1$，根据Hurewicz定理知 $\pi_n(X)=0$。对任意 n 维单形 $\sigma^n\in K$，部份映射：$F_{n-1}|\sigma^n\times(0)\cup\sigma^n\times(1)\cup\partial\sigma^n\times I$ 可扩充至映射：$\sigma^n\times I\to X$，于是 F_{n-1} 可扩充至适合要求的 $F_n:T_n\to X$。▌

附记1. 本定理亦首先由W·Hurewicz给出（1936年）。

附记2. 本定理的逆命题是明显的。即如果 X 可缩成一点，则 $\pi_q(X)=0=H_q(X)$，$q\geqslant 1$。

§4 $\pi_n(S^n)$ 与映射度概念

n 维球 S^n（$n\geqslant 1$）是简单而重要的拓朴空间。它的同伦群的计算，即 S^q 到 S^n 的映射同伦分类问题是有趣而困难的问题。本节由Hurewicz定理出发，计算 $\pi_q(S^n)$，$1\leqslant q\leqslant n$，$n\geqslant 2$；对于 $n=1$ 的情形，亦加以讨论。并利用映射度的概念解决了 S^n 到 S^n（$n\geqslant 1$）的映射同伦分类问题。

定理4.1 设 S^n 是 n 维球，$n\geqslant 2$，则

$$\pi_q(S^n)=0,\qquad 1\leqslant q<n,$$
$$\pi_n(S^n)\approx J.$$

证明　由例Ⅰ4.3，知$\pi_1(S^n)=0$，$n\geqslant 2$。因为$H_q(S^n)=0$，$1\leqslant q<n$，根据 Hurewicz 定理有$\pi_q(S^n)=0$，$1\leqslant q<n$。即S^n是$(n-1)$-连通空间，故$\pi_n(S^n)\approx H_n(S^n)\approx J$。】

注意到Hurewicz同态的定义

$$\mathscr{H}:\pi_n(S^n)\to H_n(S^n),\qquad \mathscr{H}(\alpha)=f_*(\iota),$$

其中$\alpha=[f]\in\pi_n(S^n)$，$f:(S^n,p_0)\to(S^n,p_0)$，ι是$H_n(S^n)$中取定的生成元（见§3）。

现在我们引进一个十分有用的概念——**映射度**。它最初是由 L.E.J. Brouwer 在1912年提出的。

定义4.1　设$f:S^n\to S^n$是映射，$n\geqslant 1$，ι是如§3所取定的$H_n(S^n)$的生成元，则有$f_*(\iota)=\rho\iota$，其中整数ρ称为映射f的映射度（或Brouwer拓朴度），并记$\rho=\deg(f)$。

命题4.2　设$f\simeq g:S^n\to S^n$，则$\deg(f)=\deg(g)$。】

换言之，$[f]\to\deg(f)$是单值对应

$$\deg:\pi_n(S^n)\to J,\qquad n\geqslant 1.$$

且根据同态$\mathscr{H}$的定义，知 deg 是一个在上同态。（其在上性是因为，当$f\simeq 1_{S^n}$，有$\deg(f)=1$。）

根据定理4.1，对于$n\geqslant 2$，有$\mathscr{H}:\pi_n(S^n)\approx H_n(S^n)$。并注意到$S^n$是$n$-单式的，从而得到关于$S^n$到$S^n$的映射同伦分类的基本事实，这可从下面定理看到。

定理4.3(H. Hopf)　设f与$g:S^n\to S^n$是两个映射，$n\geqslant 1$。则$f\simeq g:S^n\to S^n$当且仅当$\deg(f)=\deg(g)$。】

从定理3.5′及命题4.2，并结合练习题Ⅰ.16，也可看出这个定理对$n=1$成立，但我们另证如下。先作一点予备。

记$S^1=\{z\in C\mid |z|=1$，C是复数域$\}$为一维球。命$p:E^1\to S^1$为指数映射，使得$p(x)=e^{2\pi ix}$，$x\in E^1$。易见：

$p(x_1+x_2)=p(x_1)\cdot p(x_2)$（右边是复数乘法）；

$p(x_1)=p(x_2)$当且仅当x_1-x_2是整数；

$p|(0,1):(0,1)\to S^1-(1)$是同胚映射。

（见图4.1。）

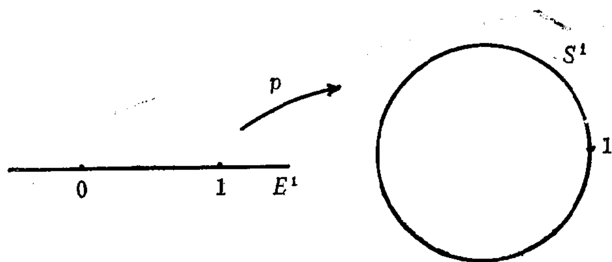


图 4.1

引理4.4 设$\sigma: I \to S^1$是映射，$\sigma(0)=1$。则存在映射$\tau: I \to E^1$，使 $\tau(0)=0$，$p\tau=\sigma$。

证明 因 I 是紧致集，知映射σ有一致连续性，即存在 $\delta>0$，只要 $|x-x'|<\delta$，$x, x' \in I$，便有 $|\sigma(x)-\sigma(x')|<2$。因之 $\sigma(x)$ 与 $\sigma(x')$不是 S^1上的对径点。于是，I 有分割 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$，使得$\sigma$将$I_i=[x_i, x_{i+1}]$ 映射至 S^1 上连通真子集 U_i，$i=0,1,\cdots,n-1$。

下面用归纳法来定义：映射$\tau_i:[0,x_i]\to E^1$，使得

$$\tau_i(0)=0,\ p\tau_i=\sigma|[0,x_i], \qquad i=0,1,\cdots,n.$$

当 $i=0$，显然τ_0存在。

如τ_i $(0\leqslant i<n)$ 已定义，考虑$U_i=\sigma(I_i)$。因 p 将 $p^{-1}(U_i)$ 的任一个连通分支同胚映射至U_i，记 V_i是其中包含 $\tau_i(x_i)$的一个连通分支。则有 $p_i^{-1}: U_i \to V_i$ 是 $p|V_i$ 的逆同胚映射。于是命 $\tau_{i+1}:[0,x_{i+1}]\to E^1$，使得

$$\tau_{i+1}(x)=\begin{cases}\tau_i(x), & x\in[0,x_i],\\ p_i^{-1}\sigma(x), & x\in[x_i,x_{i+1}].\end{cases}$$

则归纳步骤完成。】

附记　指数映射 p 的上述性质称为复叠路径性质(见Ⅳ.§5)。且引理4.4中的映射 τ 是唯一的。

现给定理4.3当 $n=1$ 时的证明。

必要性　见命题4.2。

充分性　由 $\deg:\pi_1(S^1)\to J$ 的同态性，只须证明：设映射 $f:S^1\to S^1$，使得 $\deg(f)=0$，则有 $f\simeq c:S^1\to S^1$，c 是常值映射，$c(S^1)=1$。

首先，不妨设 $f(1)=1$。事实上，取 $u\in E^1$，使得 $p(u)=f(1)$，则有 $f_t:S^1\to S^1$，使 $f_t(z)=\dfrac{f(z)}{p(ut)}$，$z\in S^1$，$t\in I$。由此知 $f\simeq f_1:S^1\to S^1$，而 $f_1(1)=1$。

其次，记 $\sigma=fp:I\to S^1$，知 $\sigma(0)=f(1)=1$。根据引理4.4，存在映射 $\tau:I\to E^1$，使得 $\tau(0)=0$，$p\tau=\sigma$。又知 $p\tau(1)=\sigma(1)=f(1)=1$，即 $m=\tau(1)$ 是整数。

命 $\eta_t:I\to E^1$，$t\in I$，使得 $\eta_t(u)=\tau(u)+t\xi_m(u)-t\tau(u)$，其中 $\xi_m:I\to E^1$ 是映射，使 $\xi_m(u)=mu$，$u\in I$。又命 $f_t:S^1\to S^1$，$t\in I$，使得

$$f_t(z)=\begin{cases}p\cdot\eta_t\cdot q(z), & z\in S^1-(1)\\ 1, & z=1,\end{cases}$$

其中 $q:S^1-(1)\to(0,1)$ 是 p 的逆同胚映射，易见

$$f=f_0,\qquad \deg(f_1)=m.$$

根据命题 4.2，知 $m=0$。故 $f_1:S^1\to S^1$ 是常值映射，有

$$f_1(S^1)=1. ▮$$

§5　相对 Hurewicz 定理

本节主要是证明定理 5.3，即关于路径连通空间偶 (X,A) 的 Hurewicz 定理。证明是按§3类似的方式，因而有一些琐碎的

细节留给读者作复习时练习之用，亦可参阅 1948年 A. L. Blakers 的文章[9]。

设(X,A)是路径连通的拓扑空间偶，以下取定基点$x_0\in A$。由于(∇^n, S^{n-1})的同调叙列的正合性等，有

$$\partial_*: H_n(\nabla^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(S^{n-1})\ (\approx J),\quad n\geqslant 2.$$

则 $H_n(\nabla^n,S^{n-1})$中有唯一的生成元ι'，使得$\partial_*(\iota')=\iota$（$\iota\in H_n(S^n)$，$n\geqslant 1$，见§3的选取）。

定义5.1 设$\alpha=[f]\in\pi_n(X,A)$，其中$f:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$。则我们定义$\mathscr{H}(\alpha)=f_*(\iota')\in H_n(X,A)$，这里$f_*$是$f$导出的同态：$H_n(\nabla^n,S^{n-1})\to H_n(X,A)$。

易见$\mathscr{H}(\alpha)$的定义与α的代表映射f的选取无关。于是有单值对应

$$\mathscr{H}:\pi_n(X,A)\to H_n(x,A),\qquad n\geqslant 2.$$

命题5.1 上述$\mathscr{H}$是同态。

证明 取(∇^n,S^{n-1})的单纯剖分(K,L)，使K_1与K_2是K的子复形，$|K_1|=\nabla^n_+$，$|K_2|=\nabla^n_-$。记$\iota'\in H_n(\nabla^n,S^{n-1})$的代表闭链为$z_n\in Z_n(\nabla^n,S^{n-1})$。因之$z_n\in C_n(S(|K|))$，$\partial z_n\in C_{n-1}(S(|L|))$，及$z_n=z_{n1}+z_{n2}$，其中$z_{ni}\in C_n(S(|K_i|))$，$i=1,2$。

现在设$\alpha=[f]$，$\beta=[g]\in\pi_n(X,A)$，$n\geqslant 2$，其中$f,g:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$，$f(\nabla^n_-)=x_0=g(\nabla^n_+)$。命$h:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$，使得$h|\nabla^n_+=f|\nabla^n_+$，$h|\nabla^n_-=g|\nabla^n_-$。容易验证

$$\begin{aligned}h(z_n)&=h(z_{n1})+h(z_{n2})\\&=f(z_n)-f(z_{n2})+g(z_n)-g(z_{n1}),\end{aligned}$$

这里的f，g与h分别表示由映射f，g与h导出的链映射．而$f(z_{n2})+g(z_{n1})\in C_n(S(A))$，故

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\alpha+\beta)&=\mathscr{H}([h])=h_*[z_n]=f_*[z_n]+g_*[z_n]\\&=\mathscr{H}(\alpha)+\mathscr{H}(\beta).\ \rrbracket\end{aligned}$$

以下记 $\widetilde{\pi}_n(X,A)$ 是$\pi_n(X,A)$中由一切形如$\alpha-\eta_*(\alpha)$的元素生成的子群，$n\geqslant 2$（见定理Ⅰ.5.6），其中 $\alpha\in\pi_n(X,A)$，$\eta\in\pi_1(A)$ $(=\pi_1(A,x_0))$。当然，$n=2$时，$\alpha-\eta_*(\alpha)$意为 $\alpha\cdot(\eta_*(\alpha))^{-1}$。

命题5.2　$\widetilde{\pi}_n(X,A)\subseteq\ker\mathscr{H}$，$n\geqslant 2$。

证明　设 $\alpha=[f]$，$\eta_*(\alpha)=[g]$，知 $f,g:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$ 是映射，且 $f\simeq g:(\nabla^n,S^{n-1})\to(X,A)$。则

$$f_*=g_*:H_n(\nabla^n,S^{n-1})\to H_n(X,A).$$

故 $\mathscr{H}(\alpha)=\mathscr{H}(\eta_*(\alpha))$。▮

附记　根据命题Ⅰ.7.7，当$n=2$时，

$$\mathrm{Comm}(\pi_2(X,A))\subseteq\widetilde{\pi}_2(X,A).$$

因之，$\widetilde{\pi}_2(X,A)$ 是$\pi_2(X,A)$的正规子群，商群 $\dfrac{\pi_2(X,A)}{\widetilde{\pi}_2(X,A)}$ 是一个交换群。现在命$\hat{\pi}_n(X,A)=\pi_n(X,A)/\widetilde{\pi}_n(X,A)$，$n\geqslant 2$，则它是交换群。且根据命题5.2，$\mathscr{H}$ 自然地给出一同态，仍记作$\mathscr{H}$，即 $\mathscr{H}:\hat{\pi}_n(X,A)\to H_n(X,A)$，$n\geqslant 2$。

定义5.2　路径连通的拓朴空间偶 (X,A)（其中 $A\neq\varnothing$）称为m-连通的，$m\geqslant 1$，如果$\pi_i(X,A)=0$，$1\leqslant i\leqslant m$。这里 $\pi_1(X,A)=\pi_1(X,A,x_0)$，意义同定义Ⅰ.7.1。

定理5.3（W. Hurewicz）　设拓朴空间偶 (X,A)是$(n-1)$-连通的，$n\geqslant 2$，则

$$\mathscr{H}:\hat{\pi}_n(X,A)\approx H_n(X,A).$$

为了证明本定理，仿照§3作一些准备。

设 (X,A) 是路径连通的，$x_0\in A$，记$S_n(X,A)$ 为一切具有下述性质 (a) 与 (b) 的广义单形 $T^k=(\xi,\sigma^k)\in S(X)$ 的集合：

（a）ξ 把σ^k的每个顶点映射至x_0；

（b）ξ把 σ^k的 $(n-1)$ 维骨架映射至A中。

设$T^n=(\xi,\sigma^n)\in S_n(X,A)$，$\sigma^n=\langle v_0v_1,\cdots v_n\rangle$，$n\geqslant 2$，则$\sigma^n$"代表"$H_n(\sigma^n,\partial\sigma^n)$的一生成元，暂记作$\langle\sigma^n\rangle$。易见，下图表具有交换性

$$\begin{array}{ccc} H_n(\sigma^n,\partial\sigma^n) & \xrightarrow[\approx]{\partial_*} & H_{n-1}(\partial\sigma^n) \\ \uparrow \mathscr{H} & & \uparrow \mathscr{H} \\ \pi_n(\sigma^n,\partial\sigma^n) & \xrightarrow[\approx]{d_*} & \pi_{n-1}(\partial\sigma^n) \end{array}$$

由于同调叙列与同伦叙列的正合性，∂_*与d_*是同构。根据§3 Hurewicz 定理，右边同态$\mathscr{H}$是同构，故左边同态$\mathscr{H}$亦是同构。即在$\pi_n(\sigma^n,\partial\sigma^n)$中有唯一的元素，使得它有代表映射$f:(\nabla^n, S^{n-1},p_0)\to(\sigma^n,\partial\sigma^n,v_0)$。而$f_*(\iota')=\langle\sigma^n\rangle$，此元素暂记$[\sigma^n]$。

命$[T^n]=\xi_*([\sigma^n])\in\pi_n(X,A)$，其中$\xi_*$是由映射$\xi$导出的同态：$\pi_n(\sigma^n,\partial\sigma^n)\to\pi_n(X,A)$。

读者容易验证下面的性质：

(i) $[T^n]$的定义与T^n的表示(ξ,σ^n)的选取无关；

(ii) 设$g:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(\sigma^n,\partial\sigma^n,v_0)$是映射，使得$g_*(\iota')=\lambda\langle\sigma^n\rangle$，$\lambda$是整数。则$\xi g$是$\lambda[T^n]$的代表映射；

(iii) 设$T'^n=(\xi',\sigma^n)\in S_n(X,A)$，且$\xi\simeq\xi':(\sigma^n,\partial\sigma^n)\to(X,A)$，则有$\eta\in\pi_1(A)$，使$[T'^n]=\eta_*[T^n]$。特别地，如果$\xi\simeq\xi':(\sigma^n,\partial\sigma^n,v_0)\to(X,A,x_0)$，则有$[T'^n]=[T^n]$。

命题5.4 设$\overline{T}_i^n$是$\overline{T}^{n+1}=(\bar{\xi},\sigma^{n+1})\in S_n(X,A)$的$i$向面，$n\geqslant 2, i=0,1,\cdots,n+1$，则$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[\overline{T}_i^n]\in\widetilde{\pi}_n(X,A)$，（当$n=2$，$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i[\overline{T}_i^2]$表示$[\overline{T}_0^2]\cdot[\overline{T}_1^2]^{-1}\cdot[\overline{T}_2^2]\cdot[\overline{T}_3^2]^{-1}$。）

证明 设$\sigma^{n+1}=\langle v_0v_1\cdots v_{n+1}\rangle$，$\overline{T}^{n+1}=(\bar{\xi},\sigma^{n+1})\in S_n(X,A)$。记$K$与$L$分别是$\sigma^{n+1}$与$\sigma^n=\langle v_0v_1\cdots v_n\rangle$的$(n-1)$维与$(n-2)$维骨架，$B=|K|$，$D=|v_{n+1}L|$（$v_{n+1}L$是以$v_{n+1}$为顶点的$L$上的锥形）。由于$D$可缩成一点$v_{n+1}$，故$\bar{\xi}|D\simeq\mu:D\to A$，$\mu(D)$

$=x_0$。利用同伦扩充性质，知$\bar{\xi}\simeq\xi:(\sigma^{n+1},B)\to(X,A)$，其中映射$\xi$使$\xi(D)=x_0$.命$T^{n+1}=(\xi,\sigma^{n+1})$，$T_i^n$是$T^{n+1}$的$i$向面。易见$T^{n+1}\in S_n(X,A)$，且$[T_i^n]=\eta_{i*}([\bar{T}_i^n])$，其中$\eta_i\in\pi_1(A)$（见上述性质（iii））。

于是，欲证命题5.4，只须证明$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[T_i^n]\in\widetilde{\pi}_n(X,A)$。

为此，取点$p\in\operatorname{Int}\sigma^n$，有拓朴映射$\varphi$把锥形$v_{n+1}(\partial\sigma^n)$映射至$\sigma^n$上，使得$\varphi|\partial\sigma^n$是恒同映射；而$\varphi(v_{n+1})=p$，且对每个单形$\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_n v_{n+1}\rangle$，$\varphi$线性变换至$\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_n p\rangle$上，$0\leqslant i\leqslant n$。记$\sigma_i^n=\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_u p\rangle$，$\xi_i=\xi\varphi^{-1}|\sigma_i^n$，则$T^{n+1}$的$i$向面是$T_i^n=(\xi_i,\sigma_i^n)$，$i=0,1,\cdots,n$。

命$\tilde{\xi}=\xi\varphi^{-1}:\sigma^n\to X$，有$\tilde{\xi}|\sigma_i^n=\xi_i$，$0\leqslant i\leqslant n$，$\tilde{\xi}$将$L$上的锥形$p\,|L|$映射至$x_0$。因此，如记$T_{n+1}'^n=(\tilde{\xi},\sigma^n)\in S_n(X,A)$，根据$\xi$是映射：$(\sigma^{n+1},\partial\sigma^n,v_0)\to(X,A,x_0)$，由$\xi|\sigma^n\simeq\tilde{\xi}:(\sigma^n,\partial\sigma^n,v_0)\to(X,A,x_0)$及上述性质（iii），知$[T_{n+1}'^n]=[T_{n+1}^n]$。又命$\xi_i':\sigma^n\to X$是映射，使得$\xi_i'|\sigma_i^n=\xi_i$，$\xi_i'(\sigma^n-\operatorname{Int}\sigma_i^n)=x_0$，$i=0,1,\cdots,n$。则知$T_i'^n=(\xi_i',\sigma^n)\in S_n(X,A)$。记$\sigma_i'^n=\langle v_0\cdots v_{i-1}pv_{i+1}\cdots v_n\rangle$，$T_i''^n=(\xi_i,\sigma_i'^n)\in S_n(X,A)$，$i=0,1,\cdots,n$。

如果$\varphi_i:\sigma^n\to\sigma_i'^n$是线性变换，使得$\varphi_i|\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_n\rangle$是恒同映射，且$\varphi_i(v_i)=p$，则有$T_i''^n=(\xi_i\varphi_i,\sigma^n)$。由于$\xi_i'(\sigma^n-\operatorname{Int}\sigma_i^n)=x_0$，易见$\xi_i'\simeq\xi_i\varphi_i:(\sigma^n,\partial\sigma^n,v_0)\to(X,A,x_0)$。故$[T_i'^n]=[T_i''^n]$，$i=0,1,\cdots,n$。

进一步，如前所述，设$f:(\nabla^n,S^{n-1},p_0)\to(\sigma^n,\partial\sigma^n,v_0)$是$[\sigma^n]\in\pi_n(\sigma^n,\partial\sigma^n)$的代表映射，使得$f_*(\iota')=\langle\sigma^n\rangle$；由$\langle\sigma_i^n\rangle=(-1)^{n-i}\langle\sigma_i'^n\rangle$及上述性质（i）与（ii），故$[T_i'^n]=(-1)^{n-i}\eta_{i*}'[T_i^n]$，其中$\eta_{i*}'\in\pi_1(A)$，$i=0,1,\cdots,n$。

最后，仿照定理2.1与命题2.2，可证：当$n>2$，$[T_{n+1}'^n]=\sum_{i=0}^{n}[T_i'^n]$；当$n=2$，$[T_3'^2]=[T_0'^2]\cdot[T_1'^2]\cdot[T_2'^2]$。

由以上不难推知：$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[T_i^n]\in\widetilde{\pi}_n(X,A)$，$n\geqslant 2$。即命题5.4成立。】

为了叙述的方便，这里先谈谈**链复形**的概念。这是一个在代数拓朴中重要的、应用广泛的概念。欲想详细了解的读者可参阅[3]第五章。

设$C=\{C_q,\partial_p\}$。C称为一(非负)**链复形**，如果C_q是交换群，$\partial_q: C_q\to C_{q-1}$是群同态，$q$为整数，且当$q<0$，$C_q=0$，而$\partial_p\partial_{q+1}=0$。

此时，自然地有$Z(C)=\{Z_p(C)=\ker\partial_q\}$，$B(C)=\{B_q(C)=\operatorname{Im}\partial_{q+1}\}$及链复形$C$的同调群

$$H(C)=\{H_q(C)=Z_q(C)/B_q(C)\}.$$

例如，单纯复合形K的（整系数）链群叙列及边沿同态给出的链复形$\{C_q(K),\ \partial_q\}$，拓扑空间X的整系数广义链群叙列及边沿同态给出的链复形$\{C_q(S(X),\ \partial_q\}$等。

设$C=\{C_q,\partial_q\}$，$C'=\{C_q',\partial_q'\}$是两个链复形。如果有$C_q'\subseteq C_q$，$\partial_q'=\partial_q|C_q'$对所有$q$成立，则称$C'$是$C$的**子链复形**，记为$C'\subseteq C$。

由此导出**商链复形**$\overline{C}=\{\overline{C}_q,\ \overline{\partial}_q\}$，其中$\overline{C}_q=C_q/C_q'$，$\overline{\partial}_q$由$\partial_q$按自然方式导出。记$\omega_q: C_q\to\overline{C}_q$为自然同态。对于$\overline{c}_q\in\overline{C}_q$，有$c_q\in C_q$，使得$\overline{\omega}_q(c_q)=\overline{c}_q$，则命$\overline{\partial}_q(\overline{c}_q)=\overline{\omega}_{q-1}(\partial_q c_q)$，易见$\overline{C}$确是一个链复形。

例如，对拓扑空间偶$(X,\ A)$，有链复形$\{C_q(S(X)),\ \partial_q\}$与$\{C_q(S(A)),\ \partial_q'\}$。后者是前者的子链复形；而其商链复形，即$\{C_q(S(X,A)),\overline{\partial}_q\}$，其中$C_q(S(X,A))=C_q(S(X))/C_q(S(A))$。由此决定的同调群即通常所指的空间偶$(X,A)$的相对同调群$H_q(X,A)$。①

① 参阅[1]V.§3

附记 在不致引起混淆的情形下，同态∂_q与$\overline{\omega}_q$等的脚标q可略去。

现在回到广义复形$S_n(X,A)$，$n\geqslant 2$，对任$q\geqslant 0$整数，命$C_q(S_n(X,A))$为一切$T^q\in S_n(X,A)$自由生成（系数群为J）的群，它是$C_q(S(X))$的子群。就$S(X)$的边沿运算∂，有链复形：

$\mathscr{Q}'=\{C_q(S_1(A)),\partial\}$；

$\mathscr{Q}_n=\{C_q(S_n(X,A)),\ \partial\}$；

$\mathscr{Q}=\{C_q(S_1(X)),\partial\}$。

其中前一个是后一个的子链复形。

考虑$\mathscr{Q}_n$对$\mathscr{Q}'$的商链复形$\overline{\mathscr{Q}}_n$的同调群$H_q(S_n(X,A))$，$\mathscr{Q}$对$\mathscr{Q}'$的商链复形$\overline{\mathscr{Q}}$的同调群$H_q(S_1(X,A))$，我们来建立下面图表中的同态ε_n与$\lambda_\#$：

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X,A) & \xrightarrow{\varepsilon''_n} & H_n(S_1(X,A)) \\
\uparrow \mathscr{H} & \nwarrow & \uparrow \varepsilon'_n \\
\hat{\pi}_n(X,A) & \xrightarrow{\lambda_\#} & H_n(S_n(X,A)).
\end{array}$$

首先，由于$\overline{\mathscr{Q}}_n$是$\overline{\mathscr{Q}}$的子链复形，包含映射导出同态ε'_n：$H_n(S_n(X,A))\to H_n(S_1(X,A))$；同时，由于$\mathscr{Q}$，$\mathscr{Q}'$分别是$C=\{C_q(S(X)),\ \partial\}$与$C'=\{C_q(S(A)),\partial\}$的子链复形，这又自然给出同态$\varepsilon''_n:H_n(S_1(X,A))\to H_n(X,A)$。命

$$\varepsilon_n=\varepsilon''_n\cdot\varepsilon'_n:H_n(S_n(X,A))\to H_n(X,A).$$

其次，记ω：$\pi_n(X,A)\to\hat{\pi}_n(X,A)$为自然同态。对任意的$c_n=\sum_i t_iT^n_i\in C_n(S_n(X,A))$，命$\lambda(c_n)=\sum_i t_i\omega[T^n_i]\in\hat{\pi}_n(X,A)$。特别地，如$T^n_i\in S_1(A)$，根据引理I.7.3及$[T^n_i]$的定义，知$[T^n_i]=0$是$\pi_n(X,A)$的单位元。根据命题5.4，同态$\lambda$导出同态

$$\lambda_\#:\ H_n(S_n(X,A))\to\hat{\pi}_n(X,A).$$

并且可以验证(a)与(b)是成立的。

(a) 上述关于ε_n，$\lambda_\#$，与$\mathscr{H}$的图表是交换的，即 $\varepsilon_n=\mathscr{H}\lambda_\#$. 事实上，对于 $T^n\in S_n(X,A)$，因 $\partial T^n\in C_{n-1}(S_1(A))$，故 T^n总"代表" $H_n(S_n(X,A))$中的个一同调类 $\langle T^n\rangle$；反之，$H_n(S_n(X,A))$的任一个同调类都是这样的类$\langle T^n\rangle$的线性组合. 故欲证(a)，只须证明对任意的 $T^n=(\xi,\sigma^n)\in S_n(X,A)$，$\sigma^n=\langle v_0v_1\cdots v_n\rangle$，恒有$(\mathscr{H}\lambda_\#)(\langle T^n\rangle)=\varepsilon_n(\langle T^n\rangle)$. 不妨设$\sigma^n\subset E^n$. 如同§3关于生成元 ι 的定义中的取法，有拓扑变换$\bar{r}:\sigma^n\to\overline{\nabla}^n$，使得：若$u=tu'$，$t\in I$，$u'\in\partial\sigma^n$，则$\bar{r}(u)=\dfrac{tu'}{\|u'\|}$. 于是，知$(\bar{r}^{-1})_*(\iota')=\langle\sigma^n\rangle$，$(\xi\bar{r}^{-1})_*(\iota')=\xi_*(\langle\sigma^n\rangle)$，且$\xi\bar{r}^{-1}:(\nabla^n, S^{n-1},p_0)\to(X,A,x_0)$是$\omega[T^n]=\lambda_\#\langle T^n\rangle$的一个代表映射，故

$$\mathscr{H}\lambda_\#\langle T^n\rangle=\xi_*\langle\sigma^n\rangle=\varepsilon_n\langle T^n\rangle.$$

(b) $\lambda_\#$是在上同态(证略).

为了证明定理5.3，根据(a)与(b)，我们只须证明：当(X,A)是$(n-1)$-连通时，ε_n: $H_n(S_n(X,A))\approx H_n(X,A)$. 为此，我们先引进下面两个命题.

命题5.5 设(X,A)是路径连通空间偶，$x_0\in A$. 则存在链映射 $\rho:C_q(S(X))\to C_q(S_1(X))$，及链同伦 $D:C_q(S(X))\to C_{q+1}(S(X))$，$q=0,1,2,\cdots$，使得 $j\rho-1=D\partial+\partial D$，其中 1: $C_q(S(X))\to C_q(S(X))$为恒同链映射，$j:C_q(S_1(X))\to C_q(S(X))$为包含链映射，且适合性质：

(1) 如果$T^q\in S_1(X)$，则$\rho(T^q)=T^q$，

(2) $\rho(C_q(S(A)))\subseteq C_q(S_1(A))$，

$D(C_q(S(A)))\subseteq C_{q+1}(S_1(A))$.

证明的方法参照命题3.4，细节从略. ▌

命题5.6 设(X,A)是$(n-1)$-连通的空间偶，$n\geqslant 2$. 则存在链映射$\rho':C_q(S_1(X))\to C_q(S_n(X,A))$，及链同伦$D':C_q(S_1(X))\to C_{q+1}(S_1(X))$，$q=0,1,2,\cdots$，使得 $j'\rho'-1'=D'\partial+\partial D'$，其中$1':C_q(S_1(X))\to C_q(S_1(X))$ 为恒同链映射，$j':C_q(S_n(X,$

$A)) \to C_q(S_1(X)) = C_q(S_1(X,A))$为包含链映射，且适合性质：

(1) 如果$T^q \in S_n(X,A)$，则 $\rho'(T^q) = T^q$；

(2) $\rho'(C_q(S_1(A))) \subseteq C_q(S_1(A))$，

$D'(C_q(S_1(A))) \subseteq C_{q+1}(S_1(A))$。

证明的方法参照命题3.4．注意利用练习I.12这个事实，其中用到空间偶(X,A)是$(n-1)$-连通的假设．细节从略．】

由命题5.5与命题5.6知

$$\varepsilon_n'': H_n(S_1(X,A)) \approx H_n(X,A);$$

$$\varepsilon_n': H_n(S_n(X,A)) \approx H_n(S_1(X,A)).$$

从而$\varepsilon_n = \varepsilon_n''\varepsilon_n'$是一个同构．至此相对 Hurewicz 定理5.3证毕．】

推论5.7 设(X,A)是$(n-1)$-连通的空间偶；且(X,A)是n-单式的（假如A是单连通的情形）．则有

$$\mathscr{H}: \pi_n(X,A) \approx H_n(X,A).】$$

§6 多面体的伦型与同伦群

如I．§6所指出的，设X与Y是具有相同伦型的路径连通空间，则$\pi_q(X,x_0) \approx \pi_q(Y,y_0)$，$q \geqslant 1$．一般地说，具有同构的各维同伦群的空间不一定是同伦型的，这种简单例子可见王宪钟的文章[27]．

然而，如果此种同构是由映射$f: X \to Y$所导出的，即称同伦群的同构“被f几何地实现”时，对X与Y是有限多面体的情形，则可以证明X与Y是同伦型的．1949年J·H·C·Whitehead在[31]中，对于颇为广泛的CW-复形的空间证明了这个结论（见[2]第七章定理3.1）．本节仅限于讨论有限多面体的情形．

作为工具，我们先介绍映射柱形的概念．

设X与Y是路径连通空间，$f: Z \to Y$为映射．记$W = (X \times I) \cup Y$是空间$X \times I$与Y的拓扑和（设$(X \times I) \cap Y = \varnothing$）．在$W$中，我们将$(x,1) \in X \times I$与$f(x)$等同，所得的商空间$M_f$称为$f$的

映射柱形。

确切地说，命 $p:W\to W$ 为一对应，使得

$$p(x,s)=\begin{cases} f(x), & x\in X, s=1, \\ (x,s), & x\in X, 0\leqslant s<1, \end{cases}$$

$$p(y)=y, \qquad y\in Y.$$

并记 $M_f=p(W)$。在 M_f 中引入"商拓扑"，即使 M_f 成为一个拓扑空间，且 $p\in W\to M_f$ 是一个映射。此时，$U\subseteq M_f$ 是开集当且仅当 $p^{-1}(U)$ 在 W 中是开集。

记 $i\in X\to M_f$，使得 $i(x)=p(x,0)$；$i':Y\to M_f$，使得 $i'(y)=p(y)$。可知 i 与 i' 是在中同胚，从而 X 与 Y 可看成 M_f 的闭子空间。显然，M_f 是路径连通的。

命题6.1 空间 M_f 与 Y 是同伦等价的，且 Y 是 M_f 的形变收缩核①。

证明 命 $h_t:M_f\to M_f, t\in I$，使得 $h_t(p(x,s))=p(x,(1-s)+s)$，$(x,s)\in X\times I$；且 $h_t(y)=y, y\in Y$。知 h_t 是连接恒同映射 h_0 至 h_1 的同伦。

记 $r:M_f\to Y$ 为映射，使得 $r(p(x,s))=f(x)$，$(x,s)\in X\times I$；且 $r(y)=y$，$y\in Y$。易见，$ri':Y\to Y$ 是恒同映射，且 $i'r=h_1$。故 r 是从 M_f 到 Y 的同伦等价映射，Y 是 M_f 的形变收缩核。】

由是 $r_*:\pi_n(M_f)\approx\pi_n(Y)$，且因 $r|X=f$，知交换性在下图表中成立。

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(M_f) & \xrightarrow[\approx]{r_*} & \pi_n(Y) \\ {\scriptstyle i_*}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle f_*} \\ & \pi_n(X) & \end{array}$$

考虑空间偶 (M_f,X) 的同伦叙列

$$\cdots\xrightarrow{d_*}\pi_n(X)\xrightarrow{i^*}\pi_n(M_f)\xrightarrow{j_*}\pi_n(M_f,X)\xrightarrow{d_*}\pi_{n-1}(X)$$

① 形变收缩核的定义，参阅[1]75页

$$\cdots\cdots \xrightarrow{d_*} \pi_1(X) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M_f) \xrightarrow{j_*} \pi_1(M_f, X) \to 0$$

的正合性，可知 $f_*: \pi_n(X) \approx \pi_n(Y)$，$n=1,2,\cdots$，当且仅当

$$\pi_n(M_f, X) = 0, \qquad n=1,2,\cdots.$$

定理6.2（J·H·C·Whitehead）　设 $X=|K|$ 与 $Y=|L|$ 为路径连通空间，其中K与L是有限单纯复形，如果有映射 $f: X\to Y$，使得 $f_*: \pi_n(X)\approx\pi_n(Y)$，$n=1,2,\cdots$，则 f 是同伦等价。

证明　不失一般性，可设 f 是对K与L而言的单纯映射，因为否则可用一个与 f 同伦的单纯映射来代替它。由于图表

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{r} & Y \\ & {}_{i}\nwarrow \quad \nearrow_{f} & \\ & X & \end{array}$$

的交换性及命题6.1，只须证明X是M_f的形变收缩核。

记K^n与L^n分别是复形K与L的n维骨架；$f_n = f|\,|K^n|: |K^n| \to |L^n|$，$M_{f_n}$为$f_n$的映射柱形。考虑$M_f$的子集 $P_n = X\cup M_{f_n}\cup|L^{n+1}|$，$n\geqslant -1$。显然

$$X\subseteq P_{-1}\subseteq P_0\subseteq P_1\subseteq\cdots\subseteq M_f.$$

现在我们对n用归纳法定义：P_n在M_f内的形变映射 $h_{nt}: P_n\to M_f$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使得 $h_{n1}(P_n)\subseteq X$。且对任意t，有：(i) $h_{nt}|X$ 是X上的恒同映射；(ii) $h_{(n+1)t}|P_n = h_{nt}$。

首先，设$n=-1$。因M_f是路径连通的，$P_{-1}=X\cup\{b_i\}$，其中b_i是L的顶点。将b_i在M_f中路径连接至X中即可得适合要求的形变 h_{-1t}，$0\leqslant t\leqslant 1$。

其次，设对某一个$n\geqslant 0$，在P_{n-1}上已定义形变$h_{(n-1)t}$，$0\leqslant t\leqslant 1$适合上述要求。明显地，$P_n = P_{n-1}\cup(\bigcup_{\sigma^n\in K} M_{f_{\sigma^n}})\cup(\bigcup_{\tau^{n+1}\in L}\tau^{n+1})$，其中$f_{\sigma^n}=f|\sigma^n:\sigma^n\to f(\sigma^n)$。记$B_{\sigma^n}=\sigma^n\cup M_{f_{\partial\sigma^n}}\cup f(\sigma^n)\subseteq M_{f_{\sigma^n}}$，其中$f_{\partial\sigma^n}=f|\partial\sigma^n:\partial\sigma^n\to f(\partial\sigma^n)$。易见 $\partial\tau^{n+1}=\tau^{n+1}\cap P_{n-1}$，$B_{\sigma^n}=M_{f_{\sigma^n}}\cap P_{n-1}$。而因$f$是单纯映射，对不

同的$M_{f_{\sigma^n}}$与τ^{n+1}，其公共部分只能在P_{n-1}内，且$M_{f_{\sigma^n}}$与τ^{n+1}均为P_n的闭子集。因此，根据归纳法的假设，欲证有适合要求的形变$h_{nt}:P_n\to M_f$，$0\leqslant t\leqslant 1$，只须指出：

(1) τ^{n+1}上的恒同映射的部分同伦$h_{(n-1)t}|\partial\tau^{n+1}$可扩充至同伦$\xi_t:\tau^{n+1}\to M_f$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使$\xi_1(\tau^{n+1})\subseteq X$。事实上，根据定理假设$\pi_{n+1}(M_f,X)=0$，利用练习 I.12即得。

(2) $M_{f_{\sigma^n}}$上的恒同映射的部分同伦$h_{(n-1)t}|B_{\sigma^n}$可扩充至同伦$\eta_t:M_{f_{\sigma^n}}\to M_f$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使得$\eta_1(M_{f_{\sigma^n}})\subseteq X$。事实上，对$0\leqslant t\leqslant 1$，命$\tilde{h}_t:\partial(\sigma^n\times I)\to M_f$为映射，使得$\tilde{h}_t(u)=h_{(n-1)t}P(u)$，其中$P:\sigma^n\times I\to M_{f_{\sigma^n}}$为映射柱形定义中的自然映射。知$\tilde{h}_t$是$p$的部分同伦，使得$\tilde{h}_1(\partial(\sigma^n\times I))\subseteq X$。根据定理假设，$\pi_{n+1}(M_f,X)=0$，$\tilde{h}_t$可扩充至$p$的同伦$\tilde{\eta}_t:\sigma^n\times I\to M_f$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使得$\tilde{\eta}(\sigma^n\times I)\subseteq X$。然而$p|\sigma^n\times I-\partial(\sigma^n\times I)$是一一对应的映射，故有适合(2)中要求的同伦$\eta_t$，使$\tilde{\eta}_t=\eta_t p$。

归纳步骤完成。

最后，由于K与L是有限复形，必有整数m，使$P_m=M_f$。因此】前述性质的形变$h_t:M_f\to M_f$的存在表明X是M_f的形变收缩核。,

利用 Hurewicz 定理，相应地可考虑在同调论上的结果。

定理6.3 设$X=|K|$与$Y=|L|$是单连通的(路径连通)空间，其中K与L为有限单纯复形，如果有映射$f:X\to Y$，使得$f_*:H_n(X)\approx H_n(Y)$，$n=1,2,\cdots$，则f是一个同伦等价。

证明 记M_f与$r:M_f\to Y$如命题6.1所设，知$r_*:H_n(M_f)\approx H_n(Y)$，且交换性在图表

$$\begin{array}{ccc} H_n(M_f) & \xrightarrow[\approx]{r_*} & H_n(Y) \\ {}_{i_*}\nwarrow & & \nearrow{}_{f_*} \\ & H_n(X) & \end{array}$$

中成立，其中$i:X\to M_f$为包含映射（如前所述）。

利用空间偶(M_f,X)的同调叙列的正合性及定理假设，知

$H_n(M_f,X)=0$，$n=0,1,2,\cdots$。而 X 与 Y 是单连通的，有 $\pi_1(M_f,X)=0$，$\widetilde{\pi}_n(M_f,X)=0$，$n=2,3,\cdots$。逐次用相对 Hurewicz 定理5.3，知 $\pi_n(M_f,X)=0$，$n=2,3,\cdots$。因之适合定理6.2的条件，故 f 是一个同伦等价。】

作为定理6.3的应用，我们有下列推论。

推论6.4　设 $X=|K|$ 是单连通的（路径连通）空间，其中 K 是 n 维（有限）复形，$n\geqslant 2$，如果 $H_q(X)=0$，$2\leqslant q<n$，则 X 与某空间 $W_s=\underbrace{S^n\vee\cdots\vee S^n}_{s}$ 具有相同的伦型，其中 W_s 表示 s 个 n 维球 S^n 仅在一点相接触的和空间，当 $s=0$，W_s 表示一点。

证明　依 Hurewicz 定理3.5及假设，有 $\pi_q(X)\approx H_q(X)=0$，$1\leqslant q<n$；及 $\pi_n(X)\approx H_n(X)=Z_n(K)\approx\underbrace{J\oplus\cdots\oplus J}_{s}$。取 $\pi_n(X)$ 的一组生成元（s个）的代表映射，易见有映射 $f:W_s\to X$，使得 $f_*:H_q(W_s)\approx H_q(X)$，$q=1,2,\cdots$。显然 W_s 是单连通的。故由定理6.3，f 是同伦等价。】

§7　同伦群的直和分解定理

§3的 Hurewicz 定理提供了计算某些空间的第一个非零同伦群的方法。本节给出同伦群在一定条件下的直和分解定理，以便于在某些情况下的计算。

在叙述主要事实之前，先作一点代数上的准备。

命题7.1　设 $0\to A\xrightarrow{\theta}B\xrightarrow{\tau}C\to 0$ 是由群 $A,B,$ 与 C 及群同态 θ 与 τ 组成的正合叙列，且 $\theta(A)$ 包含于 B 的中心内，其中0为零群。则

（1）A 是交换群；

（2）$B\approx A\oplus C$，如果下面两条件中任一个成立：(i) 存在

同态 $\chi: C \to B$，使得 $\tau\chi = 1$（恒同）$: C \to C$；(ii) 存在同态 $\psi: B \to A$，使得 $\psi\theta = 1$（恒同）$: A \to A$，其中$\oplus$表示群的直和.（在非交换情形也称直积，但在本节均采用直和的符号.）

证明　(1) 显然成立.

(2) 只证(i). 对于 (ii)的情形类似，请自己证.对于 $b \in B$，因 $\tau(\chi\tau(b) \cdot b^{-1}) = \iota$（单位元素），有$a \in A$，使得$\theta(a) = \chi\tau(b) \cdot b^{-1}$，即 $b = \theta(a^{-1}) \cdot \chi\tau(b)$. 若 $\theta(a) = \chi(c)$，则

$$c = \tau\chi(c) = \tau\theta(a) = \iota.$$

于是由于 $\theta(A)$ 在 B 的中心内，$B \approx \theta(A) \oplus \chi(C)$，而 θ 与 χ 为在中同构，故 $B \approx A \oplus C$.]

下面分别介绍几个同伦群的直和分解定理.

定理7.2　设(X, A)是路径连通空间偶；A 是 X 的收缩核①；$i: A \to X$ 是包含映射. 则当 $n \geq 1$ 时有 $i_*: \pi_n(A) \to \pi_n(X)$ 是在中同构；当 $n \geq 2$ 时有 $\pi_n(X) \approx \pi_n(A) \oplus \pi_n(X, A)$.

证明　命 $\gamma: X \to A$是保核收缩映射，知$\gamma_* i_* = 1$（恒同）$: \pi_n(A) \to \pi_n(A)$，$n \geq 1$，因而 i_*是在中同构，γ_*是在上同态.

如 $n \geq 2$，根据(X, A)的同伦叙列的正合性，有 $d_*\pi_n(X, A) = i_*^{-1}(0) = 0$. 从而得到正合叙列

$$0 \to \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \to 0, \quad n \geq 2,$$

及 $\gamma_*: \pi_n(X) \to \pi_n(A)$，使 $\gamma_* i_* = 1$.

故根据命题7.1中的结论(b)，有

$$\pi_n(X) \approx \pi_n(A) \oplus \pi_n(X, A), \qquad n \geq 2. \;]$$

附记　显然此时 $\pi_2(X, A)$是交换群.

定理 7.3　设(X, A)是路径连通空间偶，$x_0 \in A$，且A在X内可缩成一点x_0 (rel x_0). 即有同伦 $h_t: (A, x_0) \to (X, x_0)$，$t \in I$，

① 参见[1]68页.

使得 $h_0=i$，$h_1(A)=x_0$。则当 $n\geqslant1$ 时有 $i_*:\pi_n(A)\to\pi_n(X)$ 是零同态；当 $n\geqslant2$ 时有 $\pi_n(x,A)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_{n-1}(A)$。

证明　当 $n\geqslant1$，$i_*=0$ 是明显的。

设 $n\geqslant2$，$k(A)$ 表示 A 上的锥形。利用 h_t 便有映射 $H:k(A)\to X$，根据 $k(A)$ 的可缩性及同伦正合叙列，知 $\bar{d}_*:\pi_n(k(A),A)\approx\pi_{n-1}(A),n\geqslant2$。

定义同态 $\omega:\pi_{n-1}(A)\to\pi_n(X,A)$，使得 $\omega=H_*\cdot\bar{d}_*^{-1}$，其中 $H_*:\pi_n(k(A),A)\to\pi_n(X,A)$ 是由 H 导出的同态，$n\geqslant2$。易见 $d_*\omega=1$（恒同）$:\pi_{n-1}(A)\to\pi_{n-1}(A)$ 这里 $d_*:\pi_n(X,A)\to\pi_{n-1}(A)$ 是边沿同态。于是，有正合叙到

$$0\to\pi_n(X)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A)\xrightarrow{d_*}\pi_{n-1}(A)\to0\quad(n\geqslant2),$$

及 $\omega:\pi_{n-1}(A)\to\pi_n(X,A)$，使得 $d_*\omega=1$。

故根据命题7.1中的结论（b），有

$$\pi_n(X,A)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_{n-1}(A),\qquad n\geqslant2.$$

注意，当 $n=2$ 时，虽然 $\pi_2(X,A)$ 一般不是交换群，但利用推论 I .7.8，$j_*\pi_2(X)$ 包含在 $\pi_2(X,A)$ 的中心内，故命题7.1的条件成立。】

定理7.4　设 (X,A) 是路径连通空间偶，$x_0\in A$，且 X 可形变至 A 内 (rel x_0)。即有形变同伦 $h_t:(X,x_0)\to(X,x_0),t\in I$，使得 $h_0(x)=x$，$x\in X$，及 $h_1(X)\subseteq A$，则 $n\geqslant1$ 时，$i_*:\pi_n(A)\to\pi_n(X)$ 是在上同态；$n\geqslant2$ 时，$\pi_n(A)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_{n+1}(X,A)$。

证明　当 $n\geqslant1$，对于 $\alpha=[f]\in\pi_n(X)$，其中 $f:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，命 $\omega(\alpha)=[h_1f]\in\pi_n(A)$。易验证 $\omega(\alpha)$ 的定义与 α 的代表映射 f 的选取无关；且 $\omega:\pi_n(X)\to\pi_n(A)$ 是一个同态；及 $i_*\omega=1$（恒同）$:\pi_n(X)\to\pi_n(X)$。由是 i_* 是在上同态。

设 $n\geqslant2$，考虑交换群的正合叙列

$$0\to\pi_{n+1}(X,A)\xrightarrow{d_*}\pi_n(A)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X)\to0,$$

及 $\omega:\pi_n(X)\to\pi_n(A)$，使得 $i_*\omega=1$。根据命题7.1中的结论

(*b*)，有

$$\pi_n(A)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_{n+1}(X,A),\qquad n\geqslant 2.]$$

附记 在定理7.3与7.4中假设的同伦 h_t 是对基点 x_0 的相对同伦，这是为了证明的方便，并非本质的要求。一般情形可参看胡世桢的文章[20]。

定理7.5 设X与Y均是路径连通空间。则

$$\pi_n(X\times Y)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y),\ n\geqslant 1,$$

其中 $X\times Y$ 是X与Y的笛卡儿积空间①。

证明 易见 $X\times Y$ 是路径连通的。不妨取 $x_0\in X$, $y_0\in Y$, $(x_0,y_0)\in X\times Y$ 分别作为 X, Y 与 $X\times Y$ 上同伦群的基点。记 $p_1:X\times Y\to X$, $p_2:X\times Y\to Y$ 是自然投射，即对于$(x,y)\in X\times Y$，有 $p_1(x,y)=x$, $p_2(x,y)=y$。又记 $i_1:X\to X\times Y$, $i_2:Y\to X\times Y$是内射，即对$x\in X$, $y\in Y$，有 $i_1(x)=(x,y_0)$, $i_2(y)=(x_0,y)$。知

$$p_{1*}i_{1*}=1(\text{恒同}):\pi_n(X)\to\pi_n(X),\qquad n\geqslant 1;$$

$$p_{2*}i_{2*}=1(\text{恒同}):\pi_n(Y)\to\pi_n(Y),\qquad n\geqslant 1;$$

$$p_{1*}i_{2*}=0;\qquad p_{2*}i_{1*}=0.$$

因而 $p_{1*}:\pi_n(X\times Y)\to\pi_n(X)$, $p_{2*}:\pi_n(X\times Y)\to\pi_n(Y)$是在上同态；$i_{1*}:\pi_n(X)\to\pi_n(X\times Y)$, $i_{2*}:\pi_n(Y)\to\pi_n(X\times Y)$是在中同构，$n\geqslant 1$。

对 $\alpha\in\pi_n(X\times Y)$，命 $\chi(\alpha)=(p_{1*}(\alpha),\ p_{2*}(\alpha))\in\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)$，得到同态 $\chi:\pi_n(X\times Y)\to\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)$, $n\geqslant 1$。则

（1）χ是在上的。事实上，对 $\beta\in\pi_n(X)$, $\gamma\in\pi_n(Y)$，记 $\alpha=i_{1*}(\beta)+i_{2*}(\gamma)\in\pi_n(X\times Y)$，知

$$\chi(\alpha)=(p_{1*}i_{1*}\beta+p_{1*}i_{2*}\gamma,\ p_{2*}i_{1*}\beta+p_{2*}i_{2*}\gamma)=(\beta,\gamma).$$

（2）χ是在中同构。事实上，如果对 $\alpha=[f]\in\pi_n(X\times Y)$，有 $\chi(\alpha)=0$，其中 $f:(S^n,p_0)\to(X\times Y,(x_0,y_0))$，知 $p_{1*}(\alpha)=0$,

① 定义见[1]31页。

$p_{2*}(\alpha)=0$。于是

$$p_1 f\simeq 0(\text{常值}):(S^n,p_0)\to(X,x_0);$$

$$p_2 f\simeq 0(\text{常值}):(S^n,p_0)\to(Y,y_0).$$

不难定义连接 f 至常值映射（相对于基点）的同伦，故$\alpha=0$。

总之， $\chi:\pi_n(X\times Y)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)$， $n\geqslant 1$。 ∎

附记1． 由（1）知 $\chi^{-1}:\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)\approx\pi_n(X\times Y)$，$n\geqslant 1$，使得 $\chi^{-1}(\beta,\gamma)=i_{1*}(\beta)+i_{2*}(\gamma)$。

附记2． 用数学归纳法不难知道定理 7.5 对任意有限个空间的积空间成立。

例 7.1 记二维环面 $T_2=S^1\times S^1$，因而有

$$\pi_1(T_2)\approx\pi_1(S^1)\oplus\pi_1(S^1)\approx J\oplus J;$$

$$\pi_n(T_2)\approx\pi_n(S^1)\oplus\pi_n(S^1)=0,\qquad n>1.$$

（当 $n>1$，$\pi_n(S^1)=0$。见Ⅳ § 6．）

一般地，m维环面 $T_m=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{m}$，$m\geqslant 2$，有

$$\pi_1(T_m)\approx\underbrace{J\oplus\cdots\oplus J}_{m};$$

$$\pi_n(T_m)=0,\qquad n>1.$$

设X与Y均是路径连通空间，$x_0\in X$，$y_0\in Y$ 分别是其基点。在拓扑和空间$X\cup Y$（设$X\cap Y=\varnothing$）中，将点 x_0与y_0 等同，所得的商空间记为 $X\vee Y$，称为X与Y在一点相联的空间，它也是路径连通的。

空间 $X\vee Y$ 可嵌入空间 $X\times Y$ 作为其子空间．事实上，命 $\theta:Y\vee Y\to X\times Y$为映射，使得

$$\theta(z)=\begin{cases}(z,y_0), & z\in X,\\ (x_0,z), & z\in Y.\end{cases}$$

易见，θ 将 $X\vee Y$ 拓扑映射至 $X\times(y_0)\cup(x_0)\times Y\subseteq X\times Y$ 上。

定理7.6 设 X，Y 与 $X\vee Y$ 如上所述，对 $n\geqslant 2$，有

$$\pi_n(X\vee Y)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)\oplus\pi_{n+1}(X\times Y,X\vee Y).$$

证明 记 $j_1:X\to X\vee Y$, $j_2:Y\to X\vee Y$ 为包含映射。命 $\omega:\pi_n(X\vee Y)\to\pi_n(X\vee Y)$ 为同态，使得 $\omega(\alpha)=j_{1*}p_{1*}(\alpha)+j_{2*}p_{2*}(\alpha)$，其中 $\alpha\in\pi_n(X\vee Y)$。p_{1*} 与 p_{2*} 的意义见定理7.5。由于 $\theta_*j_{1*}=i_{1*}$，$\theta_*j_{2*}=i_{2*}$，有

$$\theta_*\omega(\alpha)=\theta_*(j_{1*}p_{1*}(\alpha)+j_{2*}p_{2*}(\alpha))$$
$$=i_{1*}p_{1*}(\alpha)+i_{2*}p_{2*}(\alpha)=\chi^{-1}(\chi(\alpha))=\alpha.$$

即 $\theta_*\omega=1$（恒同）$:\pi_n(X\times Y)\to\pi_n(X\times Y)$。

考虑$(X\times Y,X\vee Y)$的正合同伦叙列。因 θ_* 为在上同态，有正合叙列

$$0\to\pi_{n+1}(X\times Y,\ X\vee Y)\overset{d_*}{\to}\pi_n(X\vee Y)\overset{\theta_*}{\to}\pi_n(X\times Y)\to 0,$$

及 $\omega:\pi_n(X\times Y)\to\pi_n(X\vee Y)$，使得 $\theta_*\omega=1$。而当 $n\geqslant 2$，$\pi_n(X\vee Y)$ 是交换群。

故根据命题7.1中的结论（b），有

$$\pi_n(X\vee Y)\approx\pi_n(X\times Y)\oplus\pi_{n+1}(X\times Y,X\vee Y)$$
$$\approx\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)\oplus\pi_{n+1}(X\times Y,X\vee Y),$$

$n\geqslant 2$。】

附记 定理7.6对 $n=1$ 时一般不再成立。相应的结论可参阅[4]第二章练习 A_4。

作为应用，我们有

推论 7.7 记 $W=S^p\vee S^q$，$p\geqslant 2$，$q\geqslant 2$ 则

$$\pi_n(W)\approx\begin{cases}\pi_n(S^p)\oplus\pi_n(S^q), & 1\leqslant n<p+q-1,\\ \pi_n(S^p)\oplus\pi_n(S^p)\oplus J, & n=p+q-1.\end{cases}$$

证明 因 $S^p\times S^q$ 与 W 是单连通的，且

$$H_n(S^p\times S^q,W)\approx\begin{cases}0, & 1\leqslant n<p+q-1,\\ J, & n=p+q-1.\end{cases}$$

根据推论5.7,即得到

$$\pi_n(S^p\times S^q,W)\approx\begin{cases}0, & 1\leqslant n<p+q-1,\\ J, & n=p+q-1.\end{cases}$$

故由定理7.6即得到本推论。▮

例 7.2　$\pi_1(S^2\vee S^2)=0$;
$\pi_2(S^2\vee S^3)\approx J$;
$\pi_3(S^2\vee S^2)\approx J\oplus J\oplus J$(参见Ⅳ.§4);
……。

例7.3　设 $X=|K|$ 是单连通的(路径连通)空间，其中 K 是 n 维有限复形，$n\geqslant 2$。如果 $H_q(X)=0$，$2\leqslant q<n$，且 $H_n(X)$ 的秩为 $s\leqslant 1$，则

$$\pi_q(X)\approx\begin{cases}\underbrace{\pi_q(S^n)\oplus\cdots\oplus\pi_q(S^n)}_{s}, & 1\leqslant q<2n-1,\\ \underbrace{\pi_{2n-1}(S^n)\oplus\cdots\oplus\pi_{2n-1}(S^n)}_{s}\oplus\underbrace{J\oplus\cdots\oplus J}_{\binom{s}{2}}, & q=2n-1,\end{cases}$$

其中$\binom{s}{2}=\dfrac{s(s-1)}{2}$.

证明　根据推论 6.4，X 与空间$W_s=\underbrace{S^n\vee\cdots\vee S^n}_{s}$ 具有相同的伦型。下面对 s 作数学归纳法，计算 $\pi_q(W_s)$，$2\leqslant q\leqslant 2n-1$。

$s=1$，显然。

$s=2$，由推论7.7即知成立。

下设 $s\geqslant 3$，有 $W_s=S^n\vee W_{s-1}$。根据定理7.6，得到

$$\pi_q(W_s)\approx\pi_q(S^n)\oplus\pi_q(W_{s-1})\oplus\pi_{q+1}(S^n\times W_{s-1},W_s),$$

$q\geqslant 2$。由于 $S^n\times W_{s-1}$ 与 W_s 均是单连通，根据推论5.7，有

$$\pi_{q+1}(S^n\times W_{s-1},W_s)\approx H_{q+1}(S^n\times W_{s-1},W_s)$$

$$\approx\begin{cases}0, & 0\leqslant q<2n-1,\\ \underbrace{J\oplus\cdots\oplus J}_{s-1}, & q=2n-1.\end{cases}$$

(不难从直接计算看出。)

按归纳法假设

$$\pi_q(W_{s-1})\approx\begin{cases}\underbrace{\pi_q(S^n)\oplus\cdots\oplus\pi_q(S^n)}_{s-1}, & 2\leqslant q<2n-1,\\ \underbrace{\pi_q(S^n)\oplus\cdots\oplus\pi_q(S^n)}_{s-1}\oplus\underbrace{J\oplus\cdots\oplus J}_{\binom{s-1}{2}}, & q=2n-1.\end{cases}$$

故

$$\pi_q(W_s)\approx\begin{cases}\underbrace{\pi_q(S^n)\oplus\cdots\oplus\pi_q(S^n)}_{s}, & 2\leqslant q<2n-1;\\ \underbrace{\pi_q(S^n)\oplus\cdots\oplus\pi_q(S^n)}_{s}\oplus\underbrace{J\oplus\cdots\oplus J}_{\binom{s}{2}}, & q=2n-1.\end{cases}$$

归纳步骤完成。▌

§8　三联组同伦群

空间同伦群的性质有不少是与同调群相似的。例如伦型不变性、叙列的正合性等。然而，为什么对于像可剖分空间、甚至如S^n这样简单的空间，其同伦群也无法（至少目前是这样）完全计算出来呢？1951年 A. L. Blakers 及 W. S. Massey 指出，同调论中适合的"截去性质"① 在同伦论中一般是不成立的，这是它们的本质区别之一[10]。

例如，因 S^3 与 $\partial(\nabla^2\times\nabla^2)$ 同胚，$\partial(\nabla^2\times\nabla^2)=\nabla^2\times\partial\nabla^2\cup\partial\nabla^2\times\nabla^2$。我们记 $A=\nabla^2\times\partial\nabla^2$，$B=\partial\nabla^2\times\nabla^2$，知 $C=A\cap B$ 与环面 $S^1\times S^1$ 同胚。

由于 $\pi_q(A)\approx\pi_q(S^1)=0, q>1$，$\pi_3(S^3)\approx J$ 及 (S^3,A) 同伦叙列的正合性，有 $\pi_3(S^3,A)\approx J$。如在 S^3 中取开集 U，使得 $\overline{U}\subset\text{Int }A$，且 C 是 $A-U$ 的形变收缩核，则

$$\pi_q(A-U)\approx\pi_q(C)=0,\quad q>1,$$
$$\pi_q(S^3-U)\approx\pi_q(B)=0,\quad q>1.$$

而据 $(S^3-U,\ A-U)$ 同伦叙列的正合性，知

$$\pi_3(S^3-U,\ A-U)=0.$$

故包含映射 $i:(S^3-U,\ A-U)\to(S^3,A)$ 并不导出同伦群之间的同构，即截去性质不成立。

本节将简略叙述 A. L. Blakers 与 W. S. Massey 所提出的三联组同伦群的概念。它在一定意义下，可用来估计截去性质在同伦论中成立的限度(见推论 8.5)。由此概念所展开的许多结果，请读者阅读[10]。

设X是路径连通空间，A，B，$C=A\cap B\neq\varnothing$ 均是X的路径连通子空间，取 $x_0\in C$。又设 $\nabla^n,\nabla^n_+,\nabla^n_-,S^{n-1}=\partial\nabla^n,S^{n-1}_+$，$S^{n-1}_-$ 与 p_0 等如 I. §3和§5，$n\geq2$。

---

① 参见[3]第一章§3公理6.

记$M_n(X,A,B,x_0)=\{f|f:(\nabla^n,S_+^{n-1},S_-^{n-1},p_0)\to(X,A,B,x_0)$是映射$\}$，$\pi_n(X,A,B)=\pi_n(X,A,B,x_0)$表示$M_n(X,A,B,x_0)$中就映射的同伦关系$f\simeq g:(\nabla^n,S_+^{n-1},S_-^{n-1},p_0)\to(X,A,B,x_0)$所分成的同伦类的集合。又记

$$D_+^n=\{(t_1,t_2,\cdots t_n)\in\nabla^n|t_2\geqslant 0\},$$
$$D_-^n=\{(t_1,t_2,\cdots t_n)\in\nabla^n|t_2\leqslant 0\}.$$

引理8.1 当$n\geqslant 3$，对对$\alpha\in\pi_n(X,A,B,x_0)$，则存在$\alpha$的代表映射$f'$与$f''$，使得$f'(D_+^n)=x_0=f''(D_-^n)$。

证明 我们只证f'的存在性，类似地可考虑f''的情形。记

$$S_{1+}^{n-1}=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in S_+^{n-1}|t_2\geqslant 0\},$$
$$S_{1-}^{n-1}=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in S_-^{n-1}|t_2\geqslant 0\}.$$
$$F_1^{n-2}=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in S^{n-2}=S_+^{n-1}\cap S_-^{n-1}|t_2\geqslant 0\}$$
$$=S_{1+}^{n-1}\cap S_{1-}^{n-1}.$$

设$f:(\nabla^n,S_+^{n-1},S_-^{n-1},p_0)\to(X,A,B,x_0)$为$\alpha$的代表映射。令$a_0:S^{n-2}\to C$，使得$a_0=f|S^{n-2}$，易知有同伦$a_t:S^{n-2}\to C$，$\in I$，使$a_1(F_1^{n-2})=x_0$（见命题Ⅰ.2.2及定义Ⅰ.3.1）。令$b_t:F_1^{n-2}\to C$，使$b_t=a_t|F_1^{n-2}$，$t\in I$。

记c_0与$c_1:S_{1+}^{n-1}\to A$，d_0与$d_1:S_{1-}^{n-1}\to B$，使得$c_1(S_{1+}^{n-1})=x_0=d_1(S_{1-}^{n-1})$，$c_0=f|S_{1+}^{n-1}$，$d_0=f|S_{1-}^{n-1}$。根据同伦扩充性质（命题Ⅰ.4.3），不难知道，存在同伦$c_t:S_{1+}^{n-1}\to A$，$d_t:S_{1-}^{n-1}\to B$，$t\in I$，使得$c_t|F_1^{n-2}=b_t=d_t|F_1^{n-2}$。

记$g_t:S_{1+}^{n-1}\cup S^{n-2}\to A$，使得$g_t|S_{1+}^{n-1}=c_t$，$g_t|S^{n-2}=a_t$，及$e_0:S_+^{n-1}\to A$为$e_0=f|S_+^{n-1}$，知$g_0=e_0|S_{1+}^{n-1}\cup S^{n-2}$，再由同伦扩充性质，$g_t$有扩充同伦$e_t:S_+^{n-1}\to A$，$t\in I$。

类似的方法，如记$h_0=f|S_-^{n-1}:S_-^{n-1}\to B$，亦有同伦$h_t:S_-^{n-1}\to B$，使得$h_t|S_{1-}^{n-1}=d_t$，$h_t|S_-^{n-2}=a_t$，$t\in I$。

命$i_0=f|D_+^n:D_+^n\to X$，$i_1:D_+^n\to X$，使得$i_1(D_+^n)=x_0$；及同伦$j_t:S_{1+}^{n-1}\cup S_{1-}^{n-1}\to X$，使得$j_t|S_{1+}^{n-1}=c_t,j_t|S_{1-}^{n-1}=d_t$，$t\in I$。利用同伦扩充性质，便得到$j_t$的扩充$i_t:D_+^n\to X$。

如记 $k_t: D_+^n \cup S^{n-1} \to X$ 为同伦，$t \in I$，使得 $k_t | D_+^n = i_t$，$k_t | S_+^{n-1} = e_t, k_t | S_-^{n-1} = h_t$.根据同伦扩充性质，有同伦 $f_t: \nabla^n \to X$，$t \in I$，使得 $f_0 = f$，$f_t | D_+^n \cup S^{n-1} = k_t$。

故命 $f' = f_1: (\nabla^n, S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, p_0) \to (X, A, B, x_0)$，便有

$$f \simeq f': (\nabla^n, S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, p_0) \to (X, A, B, x_0).$$

而 $f'(D_+^{n-1}) = x_0$。】

定义8.1 设 $n \geqslant 3$，对 $\alpha = [f]$ 与 $\beta = [g] \in \pi_n(X, A, B)$，其中 $f(D_-^n) = x_0 = g(D_+^n)$．命 $h: (\nabla^n, S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, p_0) \to (X, A, B, x_0)$ 为映射，使得 $h | D_+^n = f | D_+^n$，$h | D_-^n = f | D_-^n$。则我们定义

$$\alpha + \beta = [h] \in \pi_n(X, A, B).$$

易见，“+”是 $\pi_n(A, B)$ 中的一个运算．

还可看出，$\pi_n(X, A, B)$，$(n \geqslant 3)$ 对上述运算作成一个群，称为关于 (X, A, B) 的第 n 个**三联组同伦群**．

事实上，记

$$I^{n-1} = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in E^n | t_n = 0,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ i = 1, \cdots, n-1\};$$

$$F_1'^{n-1} = \left\{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in I^{n-1} | t_2 \leqslant \frac{1}{2}\right\};$$

$$F_2'^{n-1} = \left\{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in I^{n-1} | t_2 \geqslant \frac{1}{2}\right\};$$

$$J^{n-1} = \partial I^n - \operatorname{Int} I^{n-1}.$$

则如命题Ⅰ.5.2，有映射 $\Psi: I^n \to \nabla^n$，且进一步可要求适合 $\Psi(F_1'^{n-1}) = S_+^{n-1}$，$\Psi(F_2'^{n-1}) = S_-^{n-1}$．

利用交替描述同样的方式，先证一切映射：$(I^n, F_1'^{n-1}, F_2'^{n-1}, J^{n-1}) \to (X, A, B, x_0)$ 的同伦类集合对相应的“+”组成群，因之上述 $\pi_n(X, A, B)$ 对“+”作成一个群．

注意，当 $n = 2$，$\pi_2(X, A, B)$ 是指一切映射：$(\nabla^2, S_+^1, S_-^1, p_0) \to (X, A, B, x_0)$ 的同伦类的集合．

与Ⅰ.§5类似，有下面的命题．

命题8.2　设 X,A,B,C 如前所述，$x_0,x_1\in C$，及 $\xi\in\pi(C,x_0,x_1)$，则

$$\xi_*:\pi_n(X,A,B,x_1)\approx\pi_n(X,A,B,x_0),\quad n\geqslant 3.$$ 】

这是对于路径连通空间的情形，三联组同伦群记号中可省去基点的原因。

命题8.3　当 $n>3$ 时，$\pi_n(X,A,B)$ 是交换群。

证明　考虑 E^n 中的旋转同伦 $r_t:(\nabla^n,p_0)\to(\nabla^n,p_0),t\in I$，使得对于 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\nabla^n$，有 $r_t(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(t_1',t_2',\cdots,t_n')$，而

$$t_1'=t_1\cos t\pi-t_2\sin t\pi,$$
$$t_2'=t_1\sin t\pi+t_2\cos t\pi,$$
$$t_3'=t_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_n'=t_n.$$

当 $n>3$ 时，有 $r_t(S_+^{n-1})=S_+^{n-1}$，$r_t(S_-^{n-1})=S_-^{n-1}$，及 $r_1(D_+^n)=D_-^n$，$r_1(D_-^n)=D_+^n$。

其余同定理Ⅰ.3.4的证明方法类似。】

附记　一般 $\pi_3(X,A,B)$ 不是交换群，见后面例8.2。

现在，我们来定义关于三联组 (X,A,B) 的同伦叙列（基点均为 $x_0\in C$）

$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_{n+1}(X,A,B)\xrightarrow{\partial_*}\pi_n(A,C)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,B)$$
$$\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A,B)\xrightarrow{\partial_*}\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_2(X,A,B)$$
$$\xrightarrow{\partial_*}\pi_1(A,C)\xrightarrow{i_*}\pi_1(X,B).$$

其中 ∂_*，i_* 与 j_* 的意义如下：

（i）取定拓扑变换 $\theta:\nabla^n\to S_+^n$，使得 $\theta(p_0)=p_0,\theta(\partial\nabla^n)$

$=S_+^n \cap S_-^n = S^{n-1}$, $\theta(\nabla_+^n) = D_+^{n+1} \cap S_+^n$, $\theta(\nabla_-^n) = D_-^{n+1} \cap S_+^n$.

设 $\alpha = [f] \in \pi_{n+1}(X, A, B)$, $n \geqslant 1$, 其中 $f: (\nabla^{n+1}, S_+^n, S_-^n, p_0) \to (X, A, B, x_0)$, 知 $f|S_+^n: (S_+^n, S^{n-1}, p_0) \to (A, C, x_0)$. 命

$$\partial_*(\alpha) = [(f|S_+^n)\theta] \in \pi_n(A, C).$$

易见 $\partial_*(\alpha)$ 的定义与 α 的代表映射 f 的选取无关；如 $n \geqslant 2$, ∂_* 为群同态，称为三联组 (X, A, B) 的边沿同态。

(ii) 包含映射 $i: (A, C, x_0) \to (X, B, x_0)$ 导出对应

$$i_*: \pi_n(A, C) \to \pi_n(X, B).$$

当 $n \geqslant 2$, i_* 为群同态，称为三联组 (X, A, B) 的包含同态.

(iii) 取定映射 $\varphi: (\nabla^n, S^{n-1}) \to (\nabla^n, S^{n-1})$, 使得 $\varphi(S_+^{n-1}) = p_0$. 而 $\varphi|\nabla^n - S^{n-1}: \nabla^{n-1} - S^{n-1} \to \nabla^{n-1} - S^{n-1}$, $\varphi|S^{n-1} - S_+^{n-1}: S^{n-1} - S_+^{n-1} \to S^{n-1} - (p_0)$ 均为在上同胚，且 $\varphi \simeq 1$（恒同）: $(\nabla^n, S^{n-1}) \to (\nabla^n, S^{n-1})$；又当 $n \geqslant 3$时，$\varphi(D_+^n) \subseteq D_+^n$, $\varphi(D_-^n) \subseteq D_-^n$（参看命题Ⅰ.5.2 的映射 Ψ）.

设 $\alpha = [f] \in \pi_n(X, B)$, $n \geqslant 2$, 其中 $f: (\nabla^n, S^{n-1}, p_0) \to (X, B, x_0)$, 知 $f\varphi: (\nabla^n, S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, p_0) \to (X, A, B, x_0)$. 命 $j_*(\alpha) = [f\varphi] \in \pi_n(X, A, B)$. 易见 $j_*(\alpha)$ 的定义与 α 的代表映射 f 的选取无关；如 $n \geqslant 3$, j_* 为群同态，称为三联组 (X, A, B) 的截去同态。

定理8.4 上述三联组 (X, A, B) 的同伦叙列是正合的。

证明 (1) 设 $g: (S_+^n, S^{n-1}, p_0) \to (A, C, x_0)$. 不难知道，$g$ 有扩充映射 $f: (\nabla^{n+1}, S_+^n, S_-^n, p_0) \to (X, A, B, x_0)$ 的充分必要条件是，存在同伦映射 $g_t: (S_+^n, S^{n-1}) \to (X, B)$, $t \in I$, 使得

(i) $g_0 = g$, $g_t|S^{n-1} = g|S^{n-1}$;

(ii) $g_1(S_+^n) \subseteq B$.

由此知叙列在 $\pi_n(A, C)$处是正合的，$n \geqslant 1$. (比较引理7.13及练习Ⅰ.12.)

(2) 设 $\alpha = [f] \in \pi_n(X, B)$, 其中 $f: (\nabla^n, S^{n-1}, p_0) \to (X, B, x_0)$. 若 $f(\nabla^n) \subseteq A$, 自然有 $f(S^{n-1}) \subseteq C$. 易见此时 $j_*(\alpha) =$

$[f\varphi]=0\in\pi_n(X, A, B)$。反之，设 $j_*(a)=0$。记 $g=f\varphi:(\nabla^n, S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, p_0)\to(X, A, B, x_0)$。则 $g\simeq g':(\nabla^n, S^{n-1}, p_0)\to(X, B, p_0)$，其中映射 g' 适合：$g'(\nabla_+^n)\subseteq A$，$g'(\nabla_-^n)\subseteq B$，$g'|S^{n-1}=g|S^{n-1}$。进一步，有 $g'\simeq g'':(\nabla^n, S^{n-1}, p_0)\to(X, B, p_0)$，其中映射 g'' 适合：$g''(\nabla^n)\subseteq A$，$g''(S^{n-1})\subseteq C$。可见 $a\in i_*\pi_n(A, C)$。由此知叙列在 $\pi_n(X, B)$ 处是正合的，$n\geqslant2$。

（3）设 $a=[f]\in\pi_n(X, A, B)$，其中 $f:(\nabla^n, S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, p_0)\to(X, A, B, x_0)$，使得 $\partial_*(a)=0$。因之有同伦 $f_t:(S_+^{n-1}, S^{n-2}, p_0)\to(A, C, x_0)$，$t\in I$，使得 $f_0=f|S_+^{n-1}, f_1(S_+^{n-1})=x_0$。对于部份同伦 $f_t|S^{n-2}$，$t\in I$，运用同伦扩充性质，有 $g_t:(S_-^{n-1}, p_0)\to(B, p_0)$，$t\in I$，使得 $g_0=f|S_-^{n-1}$。

命 $F_t:S^{n-1}\to A\cup B$ 为同伦，$t\in I$，使得 $F_t|S_+^{n-1}=f_t$，$F_t|S_-^{n-1}=g_t$。再由同伦扩充性质，存在同伦 $F_t':\nabla^n\to X, t\in I$，使得 $F_0'=f$。而 $F_1'(S_+^{n-1})=f_1(S_+^{n-1})=x_0$，故 $j_*[F_1']=a$。

反之，使 $a=[f]\in\pi_n(X, B, x_0)$，其中 $f:(\nabla^n, S^{n-1}, p_0)\to(X, B, x_0)$，则 $f\varphi:(\nabla^n, S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, p_0)\to(X, A, B, x_0)$ 代表 $j_*(a)$。而 $f\varphi(S_+^{n-1})=x_0$，因之 $f\varphi|S_+^{n-1}:(S_+^{n-1}, S^{n-2}, p_0)\to(A, C, x_0)$ 在 $\pi_n(A, C)$ 中代表零元（单位元），即 $\partial_*j_*(a)=0$。

由此知叙列在 $\pi_n(X, A, B)$ 处是正合的，$n\geqslant2$。】

附记　本定理的叙列亦称为三联组 (X, A, B) 的第一个同伦叙列。因为，类似地还有正合同伦叙列，即三联组 (X, A, B) 的第二个同伦叙列

$$\cdots\xrightarrow{j_*'}\pi_{n+1}(X, A, B)\xrightarrow{\partial_*'}\pi_n(B, C)\xrightarrow{i_*'}\pi_n(X, A)$$

$$\xrightarrow{j_*'}\pi_n(X, A, B)\xrightarrow{\partial_*'}\cdots\xrightarrow{j_*'}\pi_2(X, A, B)$$

$$\xrightarrow{\partial_*'}\pi_1(B, C)\xrightarrow{i_*'}\pi_1(X, A).$$

推论8.5　设(X,A,B)是三联组，且 $X=A\cup B$，$C=A\cap B$。则包含映射 $i:(A,C)\to(X,B)$ 导出同构

$$i_*:\pi_n(A,C)\approx\pi_n(X,B),\quad n\geqslant 2$$

的充分必要条件是：$\pi_n(X,A,B)=0$，$n\geqslant 3$ 及 $j_*\pi_2(X,A)=0\in\pi_2(X,A,B)$。

证明是明显的。】

例8.1　在 E^3 中取 $X=S^2$，$A=S^2_+$，$B=S^2_-$，$C=A\cap B=S^1$，$x_0=(1,0,0)$。由于A与B是可缩成一点的空间，易知：当 $n\geqslant 3$，$\pi_n(A,C)\approx\pi_{n-1}(S^1)=0$。因之，由定理8.4，

$$\pi_n(X,A,B)\approx\pi_n(X,B)\approx\pi_n(S^2),\quad n>3.$$

例8.2　在 E^3 中取 $D_1=\{x\in E^3|\|x-x_0\|\leqslant 1\}$，$D_2=\{x\in E^3|\|x+x_0\|\leqslant 1\}$，其中 $x_0=(1,0,0)$。记 $X=D_1\cup D_2$，它是有公共点（原点）的两个三维球体的和；及 $A=\{x\in\partial X|x_3\geqslant 0\}$，$B=\{x\in\partial X|x_3\leqslant 0\}$，取原点为基点。

由于 $\pi_n(X,B)=0$，$n\geqslant 2$（B是X的形变收缩核），得到

$$\partial_*:\pi_3(X,A,B)\approx\pi_2(A,A\cap B),$$

及　　$$d_*:\pi_2(A,A\cap B)\approx\pi_1(A\cap B)\ (A\text{ 是可缩的}).$$

$\pi_1(A\cap B)$不是交换群(见练习Ⅰ.17)，实际上还可证明它是由两个生成元自由生成的群，可见 $\pi_3(X,A,B)$ 不是交换群．

§9　Freudenthal 同纬像

同纬像的概念，最初是由 H. Freudenthal 于1937年在计算某些球的同伦群时提出来的。正如1950年 J. H. C. Whitehead 在[32]中所指出过的，同纬像的方法是计算空间同伦群的有效的方法之一。本节简单介绍它的定义以及同三联组同伦群的关系。对于在同伦论中重要的 Freudenthal 同纬像定理的证明留待Ⅵ.§6。

定义9.1　设X是路径连通空间，$A,B,C=A\cap B\neq\varnothing$ 是X的路径连通子空间，且A与B在自身内可缩成一点 $x_0\in C$。易知

$$d_*:\pi_{n+1}(A,C)\approx\pi_n(C),\qquad n\geqslant 1,$$
$$\widetilde{j}_*:\pi_{n+1}(X)\simeq\pi_{n+1}(X,B),\quad n\geqslant 1,$$

其中 d_* 与 $\widetilde{j}_*$ 分别是 (A,C) 与 (X,B) 同伦叙列的边沿同态和截去同态（Ⅰ.§7）。命 $E=\widetilde{j}_*^{-1}i_*d_*^{-1}:\pi_n(C)\to\pi_{n+1}(X)$，$n\geqslant 1$。则称 E 为从 C 到 X 的**同纬像同态**，其中 $i_*:\pi_{n+1}(A,C)\to\pi_{n+1}(X,B)$，即三联组 (X,A,B) 同伦叙列中的包含同态。

具体地说，同纬像同态 E 的几何表示为：记 $S^{n+1}=S_+^{n+1}\cup S_-^{n+1}$，$S^n=S_+^{n+1}\cap S_-^{n+1}$。设 $\alpha=[f]\in\pi_n(C)$，其中 $f:(S^n,p_0)\to(C,x_0)$。因为 A 与 B 是可缩的，f 分别在 S_+^{n+1} 与 S_-^{n-1} 上有扩充映射 $F_+:S_+^{n+1}\to A$，$F_-:S_-^{n+1}\to B$，于是命 $F:(S^{n+1},p_0)\to(X,x_0)$，使得 $F|S_+^{n+1}=F_+$，$F|S_-^{n+1}=F_-$。则 F 是 $E(\alpha)$ 的代表映射。

命题9.1 设 X,A,B 与 C 如定义9.1。对任意 $m\geqslant 2$，下述三条件是等价的：

（i） 当 $n\leqslant m$，$\pi_n(X,A,B)=0$；

（ii） 当 $1\leqslant n\leqslant m-2$，$E:\pi_n(C)\approx\pi_{n+1}(X)$，
当 $n=m-1$，$E:\pi_n(C)\to\pi_{n+1}(X)$ 为在上同态；

（iii） 当 $2\leqslant n\leqslant m-1$，$i_*:\pi_n(A,C)\approx\pi_n(X,B)$，
当 $n=m$，$i_*:\pi_n(A,C)\to\pi_n(X,B)$ 为在上同态。

证明 注意图表

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots\longrightarrow\pi_{n+2}(X,A,B)\longrightarrow & & & & \\
\pi_{n+1}(A,C) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{n+1}(X,B) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X,A,B)\to\cdots\\
\approx\downarrow d_* & & \approx\uparrow\widetilde{j}_* & & \\
\pi_n(C) & \xrightarrow{E} & \pi_{n+1}(X) & &
\end{array}$$

的交换性，命题不难从三联组 (X,A,B) 的同伦叙列的正合性得出。▮

重要的情形是，当 $X=S^{m+1}$，$A=S_+^{m+1}$，$B=S_-^{m+1}$，知 $C=$

$=S_{+}^{m+1}\cap S_{-}^{m+1}=S^m$，则同纬像同态 $E:\pi_n(S^m)\to\pi_{n+1}(S^{m+1})$，这即是 H. Freudenthal 最初引入同纬像概念的情形，并且在[15]中作了证明。

定理9.2(H. Freudenthal)　设 $E:\pi_n(S^m)\to\pi_{n+1}(S^{m+1})$，$m\geqslant 1$ 是同纬像同态，则

(i) 当 $1\leqslant n<2m-1$ 时，E 是同构；

(ii) 当 $n=2m-1$ 时，E 是在上同态。▌

附记　本定理称为"**粗略**"**的同纬像定理**，因为进一步还可研究，当 $n=2m-1$ 时同态 E 的核，及当 $n=2m$ 时同态 E 的像的情况。所得结果称为"精细"同纬像定理（见[2]或[32]）。

由命题9.1，易见定理9.2等价于下述定理。

定理9.3　三联组 $(S^{m+1}, S_{+}^{m+1}, S_{-}^{m+1})$ 是 $2m$-连通的，即

$$\pi_n(S^{m+1},S_{+}^{m+1},S_{-}^{m+1})=0,\qquad 当 n\leqslant 2m.$$

本定理的证明见[10]。▌

§10 J·H·C·Whitehead 乘积

设 X 是路径连通空间，$x_0\in X$。1941年 J·H·C·Whitehead 在[30]中引入了同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 之间的一种运算，它对研究空间的拓扑不变量同伦群等的性质起着重要的作用。即对于 $\alpha\in\pi_p(X,x_0)$，$\beta\in\pi_q(X,x_0)$，有 $[\alpha,\beta]\in\pi_{p+q-1}(X,x_0)$ 称为 α 与 β 的 Whitehead 乘积。后来，A·L·Blakers 和 W·S·Massey 曾作了推广[11]。本节仅叙述狭义情形的定义及其基本性质。

先作一点预备。为方便，我们记

$$\mathfrak{I}^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in E^n\,|\,-1\leqslant t_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\},$$

它是 n 维（单位）方体的同胚像。

$$\vartheta_1^n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \vartheta^n | t_n \leqslant 0\},$$
$$\vartheta_2^n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \vartheta^n | t_n \geqslant 0\},$$

它们在上述同胚下分别是 I_1^n 与 I_2^n 的像。

与命题Ⅰ.3.1 相类似，对 $n \geqslant 1$，存在映射 $\varphi_n: (\vartheta^n, \partial\vartheta^n) \to (S^n, p_0)$，使$\varphi_n$将 $\vartheta^n - \partial\vartheta^n$ 同胚映射至 $S^n - (p^0)$，且$\varphi_n(\vartheta_1^n) = S_-^n$，$\varphi_n(\vartheta_2^n) = S_+^n$。

记$\varphi_{p,q}: (\vartheta^p \times \vartheta^q, \vartheta^p \times \partial\vartheta^q \cup \partial\vartheta^p \times \vartheta^q) \to (S^p \times S^q, S^p \vee S^q)$ 为映射，使 $\varphi_{p,q}(u,v) = (\varphi_p(u), \varphi_q(v))$，其中$(u,v) \in \vartheta^p \times \vartheta^q$，$S^p \vee S^q = S^p \times (p_0) \cup (p_0) \times S^q$。

记 $\eta_{p,q}: (\vartheta^p \times \vartheta^q, \vartheta^p \times \partial\vartheta^q \cup \partial\vartheta^p \times \vartheta^q) \to (\vartheta^{p+q}, \partial\vartheta^{p+q})$ 为同胚映射，使 $\eta_{p,q}(u,v) = (t_1, \cdots, t_p, t'_1, \cdots, t'_q)$，其中$u = (t_1, \cdots, t_p) \in \vartheta^p$，$v = (t'_1, \cdots, t'_q) \in \vartheta^q$。

又记 $r_n: S^n \to \partial\vartheta^{n+1}$是从原点出发的投射（同胚）。命

$$\tilde{\varphi}_{p,q}: (S^{p+q-1}, p_0) \to (S^p \vee S^q, p_0 \times p_0)\text{为映射，}$$

使得 $\quad \tilde{\varphi}_{p,q} = \varphi_{p,q} \cdot \eta_{p,q}^{-1}|\partial\vartheta^{p+q} \cdot r_{p+q-1}, \qquad p,\ q \geqslant 1.$

定义10.1 设X是路径连通空间，$x_0 \in X$。又设 $\alpha = [f] \in \pi_p(X, x_0)$，$\beta = [g] \in \pi_q(X, x_0)$，$p$，$q \geqslant 1$，其中 $f: (S^p, p_0) \to (X, x_0)$，$g: (S^q, p_0) \to (X, x_0)$。记 $f \vee g: (S^p \vee S^q, p_0 \times p_0) \to (X, x_0)$为映射，使得

$$(f \vee g)(y, p_0) = f(y), \qquad y \in S^p;$$
$$(f \vee g)(p_0, y) = g(y), \qquad y \in S^q.$$

于是命 $[\alpha, \beta] = [(f \vee g) \cdot \tilde{\varphi}_{p,q}] \in \pi_{p+q-1}(X, x_0)$，称为$\alpha$与$\beta$的 **Whitehead 积**。

易见$[\alpha, \beta]$的定义与α，β的代表映射f与g的选取无关。

命题10.1（左分配律） 设α_1与$\alpha_2 \in \pi_p(X, x_0)$，$\beta \in \pi_q(X, x_0)$，$p > 1$，则

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \beta] = [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta].$$

证明 设 f_1与$f_2: (S^p, p_0) \to (X, x_0)$，$g: (S^q, p_0) \to (X, x_0)$，分别是$\alpha_1, \alpha_2, \beta$的代表映射，且$f_1(S_-^p) = x_0 = f_2(S_+^p)$。命$f: (S^p,$

$p_0)\to(X,x_0)$，使得 $f|S^p_+=f_1|S^p_+$，$f|S^p_-=f_2|S^p_-$。根据定义有 $[f]=\alpha_1+\alpha_2$。

记 $\theta:S^{p+q-1}\to S^{p+q-1}$ 为映射，使得对 $(y_1,\cdots,y_p,\cdots,y_{p+q})\in S^{p+q-1}$，$\theta(y_1,\cdots,y_p,\cdots,y_{p+q})=(y_1,\cdots,y_{p-1},y_{p+q},y_{p+1},\cdots,-y_p)$。因 $p>1$，$p+q-1>1$，易见 $\theta\simeq 1$（恒同）：$(S^{p+q-1},p_0)\to(S^{p+q-1},p_0)$（只须在空间 E^{p+q} 中作一个适当旋转）。

根据 Whitehead 积定义，$[\alpha_1+\alpha_2,\beta]$，$[\alpha_1,\beta]$，$[\alpha_2,\beta]$ 分别由映射 $h=(f\vee g)\tilde{\varphi}_{p,q}\theta$，$h_1=(f_1\vee g)\tilde{\varphi}_{p,q}\theta$，$h_2=(f\vee g)\tilde{\varphi}_{p,q}\theta$：$(S^{p+q-1},p_0)\to(X,x_0)$ 所代表。于是，对 $y=(y_1,\cdots,y_p,\cdots,y_{p+q})\in S^{p+q-1}_+$，即 $y_{p+q}\geqslant 0$，有

$$
\begin{aligned}
h(y)&=(f\vee g)\tilde{\varphi}_{p,q}(y_1,\cdots,y_{p-1},y_{p+q},y_{p+1},\cdots,-y_p)\\
&=(f\vee g)\cdot\varphi_{p,q}\cdot\eta^{-1}_{p,q}|\partial\vartheta^{p+q}\cdot\gamma_{p+q-1}(y_1,\cdots,y_{p-1},\\
&\quad y_{p+q},y_{p+1},\cdots,-y_p)\\
&=(f\vee g)\cdot\varphi_{p,q}(\eta^{-1}_{p,q}|\partial\vartheta^{p+q})(y'_1,\cdots,y'_p,\cdots,y'_{p+q})\\
&\qquad\qquad (y'_p\geqslant 0)\\
&=(f\vee g)\varphi_{p,q}(u,v)\qquad \text{其中 } u\in\vartheta^p_2,v\in\vartheta^q\\
&=(f\vee g)(\varphi_p(u),\varphi_q(u))\qquad \varphi_p(u)\in S^p_+\\
&=(f_1\vee g)\tilde{\varphi}_{p,q}\theta(y)\\
&=h_1(y).
\end{aligned}
$$

同理，对于 $y\in S^{p+q-1}_-$，有 $h(y)=h_2(y)$，…等。故

$$[\alpha_1+\alpha_2,\beta]=[h]=[h_1]+[h_2]=[\alpha_1,\beta]+[\alpha_2,\beta].\rfloor$$

类似可证下面的命题。

命题10.2（右分配律）　设 $\alpha\in\pi_p(X,x_0)$，β_1 与 $\beta_2\in\pi_q(X,x_0)$，$q>1$，则

$$[\alpha,\beta_1+\beta_2]=[\alpha,\beta_1]+]\alpha,\beta_2].\rfloor$$

命题10.3　设 $\alpha\in\pi_p(X,x_0)$。$\beta\in\pi_q(X,x_0)$，$p+q>2$，则

$$[\alpha,\beta]=(-1)^{pq}[\beta,\alpha].$$

证明　记 $\rho:S^{p+q-1}\to S^{p+q-1}$ 是空间 E^{p+q} 中的线性变换，使得对于 $y=(y_1,\cdots,y_p,y_{p+1},\cdots,y_{p+q})\in S^{p+q-1}$，有 $\rho(y)=(y_{p+1},$

$\cdots, y_{p+q}, y_1, \cdots, y_p)$。由于线性变换的行列式为$(-1)^{pq}$，易知$[\rho]=(-1)^{pq}\iota_{p+q-1}$，这里$\iota_{p+q-1}$是$\pi_{p+q-1}(S^{p+q-1})\approx J$中恒同映射所决定的生成元。

设$f:(S^p,p_0)\to(X,x_0)$，$g:(S^q,p_0)\to(X,x_0)$分别是α与β的代表映射，对于$y=(y_1,\cdots,y_p,y_{p+1},\cdots,y_{p+q})\in S^{p+q-1}$，有

$$\begin{aligned}(f\vee g)\tilde{\varphi}_{p,q}(y)&=(f\vee g)\varphi_{p,q}\,\eta_{p,q}^{-1}(y_1',\cdots,y_p',y_{p+1}',\cdots,y_{p+q}')\\&=(f\vee g)(\varphi_p(u),\varphi_q(v)),\end{aligned}$$

其中$u=(y_1',\cdots,y_p')\in\vartheta^p$，$v=(y_{p+1}',\cdots,y_{p+q}')\in\vartheta^q$。

$$\begin{aligned}(g\vee f)\tilde{\varphi}_{q,p}\,\rho(y)&=(g\vee f)\varphi_{q,p}\,\eta_{p,q}^{-1}(y_{p+1}',\cdots,y_{p+q}',y_1',\cdots,y_p')\\&=(g\vee f)(\varphi_q(v),\varphi_p(u)).\end{aligned}$$

可见

$$[(f\vee g)\tilde{\varphi}_{p,q}]=[(g\vee f)\tilde{\varphi}_{q,p}\,\rho].$$

故

$$[\alpha,\beta]=(-1)^{pq}[\beta,\alpha]\in\pi_{p+q-1}(X,x_0).】$$

显然，命题10.2可从命题10.1与10.3推出。

命题10.4　设$f:(X,x_0)\to(X,y_0)$为映射。则对$\alpha\in\pi_p(X,x_0)$，$\beta\in\pi_q(X,x_0)$，$p,q\geqslant1$，有

$$f_*[\alpha,\beta]=[f_*\alpha,f_*\beta]\in\pi_{p+q-1}(Y,y_0).$$

其中$f_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,y_0)$，$n\geqslant1$是由$f$导出的同态。

证明是明显的。】

命题10.5　设$\alpha\in\pi_p(X,x_0)$，$\beta\in\pi_q(X,x_0)$。则$[\alpha,\beta]=0$的充分必要条件是，存在一个映射$F:S^p\times S^q\to X$，使得$F|S^p\times(p_0):(S^p,p_0)\to(X,x_0)$代表$\alpha$，$F|(p_0)\times S^q:(S^q,p_0)\to(X,x_0)$代表$\beta$。

证明　充分性　设映射F适合要求，则有映射$\tilde{h}:\vartheta^{p+q}\to X$，使$\tilde{h}=F\cdot\varphi_{p,q}\cdot\eta_{p,q}^{-1}$。

记$h=\tilde{h}|\partial\vartheta^{p+q}:\partial\vartheta^{q+p}\to X$，易见$[h]=[\alpha,\beta]$。而因$\tilde{h}$可扩充至$h$，故$[\alpha,\beta]=0$。

必要性 设 $f:(S^p,p_0)\to(X,x_0)$, $g:(S^q,p_0)\to(X,x_0)$ 分别为 α 与 β 的代表映射．则

$$h=(f\vee g)\cdot\varphi_{p,q}\cdot\eta_{p,q}^{-1}|\partial\vartheta^{p+q}:\partial\vartheta^{p+q}\to X$$

可代表 $[\alpha,\beta]\in\pi_{p+q-1}(X,x_0)$，因 $[\alpha,\beta]=0$，知 h 可扩充至映射 $\tilde{h}:\vartheta^{p+q}\to X$。由 $\varphi_{p,q}$ 等的作法，存在映射 $F:S^p\times S^q\to X$，使 $F\cdot\varphi_{p,q}\cdot\eta_{p,q}^{-1}=\tilde{h}$, $F|S^p\vee S^q=f\vee g$。自然地，$F|S^p\times(p_0)$，$F|(p_0)\times S^q$ 分别代表 α 与 β .▌

定义10.2 设 $\xi\in\pi_m(S^p,p_0)$, $\alpha\in\pi_q(X,x_0)$，分别有代表映射 $f:(S^m,p_0)\to(S^p,p_0)$, $g:(S^p,p_0)\to(X,x_0)$.则命 $\alpha\cdot\xi=[gf]\in\pi_m(X,x_0)$，称为 α 与 ξ 的合成．

易见 $\alpha\cdot\xi$ 的定义与 ξ，α 的代表映射 f，g 的选取无关，且显然有 $\alpha\cdot\xi=g_*(\xi)$。

推论10.6 设 $\alpha\in\pi_p(X,x_0)$，$\beta\in\pi_q(X,x_0)$，$p,q\geq1$，使得 $[\alpha,\beta]=0$。则对任意 $\xi\in\pi_m(S^p)$, $\eta\in\pi_n(S^q)$，m, $n\geq1$，有

$$[\alpha\cdot\xi,\ \beta\cdot\eta]=0.$$

证明 因 $[\alpha,\beta]=0$，有映射 $F:S^p\times S^q\to X$，使 $F|S^p\times(p_0)$ 与 $F|(p_0)\times S^q$ 分别代表 α 与 β .

设 $f:(S^m,p_0)\to(S^p,p_0)$，$g:(S^n,p_0)\to(S^q,p_0)$ 分别是 ξ 与 η 的代表映射．命 $G:S^m\times S^n\to X$ 为映射，使得

$$G(u,v)=F(f(u),g(v))，\text{其中 } (u,v)\in S^m\times S^n.$$

易见 $G|S^m\times(p_0)$, $G|(p_0)\times S^n$ 分别代表 $\alpha\cdot\xi$ 与 $\beta\cdot\eta$。根据命题10.5，立即得到

$$[\alpha\cdot\xi,\ \beta\cdot\eta]=0.\ ▌$$

练 习 II

1．直接从 f_* 的定义（不用同态 k_*），证明命题3.3．（见 § 3.）

2．设 X 是路径连通空间；$f:X\to E^1$ 为映射；$h_t:X\to S^1$ $(t\in I)$ 是同伦，使 $h_0=pf$，其中 p 为 § 4的指数映射．证明：存在

唯一的同伦 $f_t:X\to E^1$, $t\in I$, 使得 $pf_t=h_t$, $t\in I$. (复叠同伦性质, 见Ⅳ§1.)

3. 证明**代数基本定理**: 设 $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 是复系数多项式, 则 $f(z)$ 总有复根.

[提示: 考虑 $g(z)=z^n$, 利用定理4.3.]

4. 验证命题5.6.

5. 设 K 为有限、连通(单纯)复形. 证明: K 与 S^1 具有相同伦型, 当且仅当

(i) $\pi_1(K)\approx J$;

(ii) $\pi_n(K)=0$, $n=2,3,4,\cdots$.

6. K 是 $(n-1)$-连通的有限复形, $n\geqslant 2$, 证明

$$\pi_{2n}(|K|\times|K|,|K|\vee|K|)\approx H_{2n}(|K|\times|K|,|K|\vee|K|),$$

其中 $|K|\vee|K|=|K|\times(v_0)\cup(v_0)\times|K|$, v_0 是 K 的一个顶点.

7. 设 (X,A,B) 如§8的三联组, $C=A\cap B$, $x_0\in C$. 证明 $\pi_1(C,x_0)$ 是 $\pi_n(X,A,B)$ 上的运算群, $n\geqslant 3$.

8. 设 (X,A,B) 如§8的三联组, 且 $B\subseteq A, x_0\in B$. 证明

$$\pi_n(X,A,B,x_0)\approx\pi_n(X,A,x_0),\qquad n\geqslant 3.$$

9. 设 $x_0\in B\subseteq A\subseteq X$. 记

$\bar{i}:(A,B,x_0)\to(X,B,x_0)$,

$\bar{j}:(X,B,x_0)\to(X,A,x_0)$,

$\bar{k}:(A,x_0,x_0)\to(A,B,x_0)$

均为包含映射. 令 $\bar{d}_*:\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_{n-1}(A,B,x_0)$ 为同态, 使得 $\bar{d}_*=k_*\cdot d_*$, 其中 $d_*:\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_{n-1}(A,x_0)$ 为边沿同态, 证明下述同伦叙列是正合的:

$$\cdots\xrightarrow{\bar{j}_*}\pi_{n+1}(X,A,x_0)\xrightarrow{\bar{d}_*}\pi_n(A,B,x_0)\xrightarrow{\bar{i}_*}\pi_n(X,B,x_0)$$

$$\xrightarrow{\bar{j}_*}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\bar{d}_*}\cdots\xrightarrow{\bar{d}_*}\pi_1(A,B,x_0)$$

(接下页)

$$\xrightarrow{\bar{i}_*}\pi_1(X,B,x_0)\xrightarrow{\bar{j}_*}\pi_1(X,A,x_0).$$

10．设X是路径连通空间，$x_0\in X$。记$S^1\vee X=S^1\times(x_0)\cup(p_0)\times X\subset S^1\times X$。则$SX=(S^1\times X)/S^1\vee X$称为空间$X$的**同纬像**。令$\omega:S^1\times X\to SX$为自然投射。

(i) 证明，对$n\geqslant 0$，$S(S^n)\approx S^{n+1}$；

(ii) 对$a=[f]\in\pi_n(X)$，$f:(S^n,p_0)\to(X,x_0)$，命$Sf:S^{n+1}\to SX$为映射，使得

$$(Sf)\omega'(t,u)=\omega(t,f(u)),$$

其中$(t,u)\in S^1\times S^n$，$\omega':S^1\times S^n\to S(S^n)=S^{n+1}$为自然投射。证明$S_*(a)=[Sf]$给出同态

$$S_*:\pi_n(X)\to\pi_{n+1}(SX)$$

（比较定义9.1）。

11．设X是路径连通空间，$CX=(X\times I)/X\times(1)$称为$X$上的锥形。证明：

(i) 映射$f:X\to Y$是零伦的，当且仅当f能扩充至CX上；

(ii) X是可缩的，当且仅当X是CX的收缩核；

(iii) $CS^{n-1}\approx\nabla^n$，$n\geqslant 1$；

(iv) $SX\approx CX/X$（见题10）。

（比较映射柱形概念§6，同纬像概念——题10.）

12．设X是路径连通空间，$x_0\in X$，$\xi\in\pi_1(X,x_0)$，$\eta\in\pi_1(X,x_0)$，$a\in\pi_m(X,x_0)$，$m>1$。证明：

(i) $[\xi,\eta]=\xi\cdot\eta\cdot\xi^{-1}\cdot\eta^{-1}\in\pi_1(X,x_0)$；

(ii) $[a,\xi]=\xi_*(a)-a\in\pi_m(X,x_0)$，其中$\xi_*$的意义见Ⅰ.§4.

第三章 阻 碍 类 理 论

〔内容提要〕

设$X=|K|$是有限多面体，Y是路径连通空间。记$M(X,Y)=\{f:X\to Y$是映射$\}$，$\pi(X,Y)$表示$M(X,Y)$中就映射的同伦关系$f\simeq f':X\to Y$所分成的同伦类的集合。借助于空间X与Y的不变量进行计算$\pi(X,Y)$的问题，是拓扑学中极重要的，一般而言，又是极困难的问题。

从Ⅰ与Ⅱ已知，当$X=S^n$，Y是n-单式的空间，则$\pi(X,Y)$与同伦群$\pi_n(Y)$成一一对应。特别地，当$Y=S^n$，可利用Brouwer映射度概念，证明两映射同伦，当且仅当其映射度相同。即用映射的同调不变量（映射度）刻划了映射的同伦关系。

与此同时，1933年 H. Hopf 解决了n维复形K^n到S^n(即$Y=S^n$)的映射同伦分类问题〔18〕. 1937年 H. Whitney 用上同调语言重新阐明 Hopf 的结果〔33〕.

1940年，S. Eilenberg 将讨论推广到一般有限复形K到n-单式空间Y的映射同伦问题，并提出了逐步扩充的“阻碍方法”〔12〕. 这就构成了本章的中心课题。

映射同伦问题是映射扩充问题的重要特款（见例1.4），所以，本章首先把同伦群及其性质应用到映射的扩充问题，然后逐步展开。

§1通过例子说明扩充问题的广泛性，并概述了以下各节将要用到的 Eilenberg “阻碍方法”. 因而亦是本章的引言。

§2介绍映射$f:\overline{K}^n\to Y$扩充的阻碍链与阻碍类的定义及其性质；而§3通过差异链性质的讨论，证明了描述阻碍类与适当的扩充映射之间有密切关系的 Eilenberg 扩充定理。这是阻碍理

论中一个重要定理〔12〕.

§4中运用映射扩充的讨论方法，引入形变链与形变的概念，证明了 Eilenberg 同伦定理.

§5是当Y为$(n-1)$-连通空间时的特别情形，因而包括了 Hopf 的分类定理. 其中介绍了映射的最初阻碍类与特征类等概念，它们在进一步研究中也是重要的工具.

最后有两点说明：

1. 本章所述的映射扩充与同伦分类问题都是对可剖空间偶(K, L)到Y而言，并采用单纯剖分的方法.（当然，如利用胞腔复形的知识，是有方便之处的，请参阅〔4〕或〔6〕.）

2. 本章将用到以一般交换群为系数群的上同调群的若干知识. 请参阅〔1〕或〔3〕.

§1　映射扩充问题

映射的扩充问题是拓扑学中主要问题之一，它在代数拓扑以及拓扑在其它数学分支的应用中经常以各种形式出现.

所谓映射的扩充问题是：设X与Y是拓扑空间，A是X的非空子空间，$g: A\to Y$为映射. 问是否存在映射$f: X\to Y$，使得$f|A=g$?

例1.1　设$P(z)$是复系数多项式. 记E^2为复数平面；$C_r=\{z\in E^2 \mid \|z\|=r>0\}$；　$D_r=\{z\in E^2 \mid \|z\|\leqslant 0\}$. 易见，对充分大的$r>0$，有映射$g: C_r\to E^2-(O)$，使得$g(z)=p(z), E\in C_r$. 则对于是否存在$g$的扩充映射$f: D_r\to E^2-(O)$，即为代数基本定理回答的问题（见练习Ⅱ.3）. 这种问题的一般形式是零点的存在性问题.

例1.2　设$F\subset Y$，问F是否分割y_0与$y_1\in Y$? 即对映射$g: \partial I\to Y$，使$g(0)=y_0$，$g(1)=y_1$，问是否有扩充映射$f: I\to Y$，使$f(I)$与F不相交?

例1.3　设(X,A)是拓扑空间偶．用映射扩充的语言叙述，A是X的收缩核，当且仅当恒同映射$1:A\to A$有扩充映射$r:X\to A$．显然，在此时，对任何拓扑空间Y，映射$g:A\to Y$，均可扩充至X上．

例1.4　设X与Y是拓扑空间，f与$g:X\to Y$是映射，且是同伦的（定义Ⅰ.1.1）．即对于映射$G:X\times\partial I\to Y$，使得$G(x,0)=f(x)$，$G(x,1)=g(x)$，$x\in X$，有扩充映射$F:X\times I\to Y$．

由于在同伦论中经常是就映射的同伦类来考虑扩充问题，因此我们需要引进下面的定义．

定义1.1　设A是拓扑空间X的子空间，$i:A\to X$是包含映射．如果对任何映射$g:A\to Y$，存在映射$f:X\to Y$，使得$fi\simeq g:A\to Y$，则f称为g的同伦扩充．一般地，对g是否有如此的f存在，称为**同伦扩充问题**．

定义1.2　设X与A如定义1.1．如果对于任一个映射$f:X\to Y$的部份同伦$H:A\times I\to Y$，使得$H(x,0)=f(x)$，$x\in A$，都存在H的扩充同伦$\widetilde{H}:X\times I\to Y$，使得$\widetilde{H}(x,0)=f(x)$，$x\in X$，则称$(X,A)$关于空间$Y$具有**同伦扩充性质**，简记$HEP$．进一步，如$(X,A)$关于任何拓扑空间$Y$具有同伦扩充性质，则称$(X,A)$有**绝对同伦扩充性质**，简记$AHEP$．

命题Ⅰ.4.3表明，可剖空间偶（$|K|$，$|L|$）具有绝对同伦扩充性质．

重要的是，设(X,A)关于Y具有同伦扩充性质．则本节开始提出的映射扩充问题仅依赖于映射$g:A\to Y$的同伦类（复习题），即等价为同伦扩充问题．

本章讨论的映射扩充问题即是限于可剖空间偶（$|K|$，$|L|$），其中K与L为有限（单纯）复形，L是K的子复形．为方便起见，以后复形K（或L等）亦代表空间$|K|$（或$|L|$等）．我们讨论的方

法是逐步扩充法。

设(K,L)为有限复形偶，Y是路径连通空间。记K^n为K的n维骨架，$\bar{K}^n=L\cup K^n$，易见，对于映射$g:L\to Y$，有

(i) g有扩充映射$g_0:\bar{K}^0\to Y$；

事实上，只须对于任一个顶点$v\in K-L$，任取$g_0(v)\in Y$即可。

(ii) g_0有扩充映射$g_1:\bar{K}^1\to Y$。

事实上，对于任意一维单形$\sigma^1\in K-L$，因Y是路径连通的，$g_0|\partial\sigma^1$有扩充映射：$\sigma^1\to Y$。

进而，如对某一个$n\geqslant 1$，g在$\bar{K}^n$上已有扩充g_n，问g_n是否可扩充至映射$g_{n+1}:\bar{K}^{n+1}\to Y$？或者较广泛地问，$g$是否可扩充至映射$f:\bar{K}^{n+1}\to Y$，使得对某正整数$m\leqslant n$，有$f|\bar{K}^m=g_n|\bar{K}^m$？

运用上述逐步扩充的方法，得到$\bar{K}^n$上的映射，$n=0,1,2,\cdots$，直至遇上扩充的“阻碍”为止。因此，这种方法亦称“**阻碍方法**”。它最初见于1940年S.Eilenberg的文章〔12〕。

§2　映射扩充的阻碍类

以下，我们总假定Y是m-单式的路径连通空间，$m=1,2,3\cdots$，及$y_0\in X$为其同伦群的基点。

先作一点予备。

命σ^{n+1}为$(n+1)$-维定向单形，$n\geqslant 1$；$\partial\sigma^{n+1}$代表$H_n(\partial\sigma^{n+1})$ $[=H_n(\partial\sigma^{n+1},J)\approx J]$的生成元，记作$\langle\partial\sigma^{n+1}\rangle$。取拓扑映射$\theta:S^n\to\partial\sigma^{n+1}$，使得$\theta_*(\iota)=\langle\partial\sigma^{n+1}\rangle$，这里$\iota\in H_n(S^n)$为生成元，见Ⅱ.§3。对映射$f_{\partial\sigma^{n+1}}:\partial\sigma^{n+1}\to Y$，知$f'=f_{\partial\sigma^{n+1}}\theta:S^n\to Y$。根据推论Ⅰ.4.9，$f'$决定$\pi_n(y)=\pi_n(Y,y_0)$中唯一的元素，记作$\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle\in\pi_n(Y)$。

容易验证：

(i) $\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle$与适合$\theta_*(\iota)=\langle\partial\sigma^{n+1}\rangle$的拓扑映射$\theta$的选取无

关；

(ii) 如 $f_{\partial\sigma^{n+1}}\simeq g_{\partial\sigma^{n+1}}:\partial\sigma^{n+1}\to Y$，则 $\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle=\langle g_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle$。特别地，$f_{\partial\sigma^{n+1}}\simeq\mu$（常值）$:\partial\sigma^{n+1}\to Y$（或者等价地，$f_{\partial\sigma^{n+1}}$ 可扩充至映射：$\sigma^{n+1}\to Y$）的充分必要条件是 $\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle=0\in\pi_n(Y)$；

(iii) 如 $\tau^{n+1}=-\sigma^{n+1}$，即取相反定向的 $(n+1)$-维单形，则 $\langle f_{\partial\tau^{n+1}}\rangle=-\langle f_{\partial\tau^{n+1}}\rangle$。

又设 σ^n 为 n 维定向单形，$n\geqslant 1$，并将其顶点排一个顺序，使此时的有序单形 $\tilde{\sigma}_n$ 代表的定向即 σ^n。对于映射 $f_{\sigma^n}:\sigma^n\to Y$，使得 $f_{\sigma^n}(\partial\sigma^n)=y_0$，记 $T^n=(f_{\sigma^n},\tilde{\sigma}^n)\in S_n(Y)$。根据定义Ⅱ.2.2，命 $\langle f_{\sigma^n}\rangle=[T^n]\in\pi_n(Y)$。由命题Ⅱ.2.4及2.5，易见

(i) $\langle f_{\sigma^n}\rangle$ 与适合所述要求的 σ^n 顶点顺序的选取无关；

(ii) 如 $\tau^n=-\sigma^n$，则 $\langle f_{\tau^n}\rangle=-\langle f_{\sigma^n}\rangle$。

于是，有下面的命题。

命题2.1　设 σ^{n+1} 是 $(n+1)$-维定向单形，$n\geqslant 1$，σ_i^n 是 σ^{n+1} 的 n 维定向面，$i=0,1,\cdots,n+1$。又设 $f_{\partial\sigma^{n+1}}:\partial\sigma^{n+1}\to Y$ 是一个映射，且把 σ^{n+1} 的 $(n-1)$-维骨架映射至 y_0。则

$$\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle=\sum_{i=0}^{n+1}[\sigma^{n+1},\ \sigma_i^n]\langle f_{\sigma_i^n}^n\rangle\in\pi_n(Y),$$

其中 $[\sigma^{n+1},\sigma_i^n]$ 为关联系数，$f_{\sigma_i^n}=f_{\partial\sigma^{n+1}}\big|\sigma_i^n$

证明　如果对 $i=0,1,\cdots,n+1$，均有 $[\sigma^{n+1},\sigma_i^n]=1$。根据Ⅱ.同伦可加定理2.1，知结论成立；

如果有某个 i，使得 $[\sigma^{n+1},\sigma_i^{n+1}]=-1$。命 $\tau_i^n=-\sigma_i^n$。由 $\langle f_{\tau_i^n}\rangle=-\langle f_{\sigma_i^n}\rangle$，可见结论仍成立。▌

现在转入本节的主要内容。

定义2.1　设 (K,L) 为有限复形偶，$\overline{K}^n$ 与 Y 等如前所述，$f:\overline{K}^n\to Y$ 是映射，$n\geqslant 1$。命

$$c^{n+1}(f)=\sum_{\sigma^{n+1}\in K}\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle\sigma^{n+1}\in C^{n+1}(K,\ \pi_n(Y)),$$

其中 $f_{\partial\sigma^{n+1}}=f|\partial\sigma^{n+1}$. $\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle\in\pi_n(Y)$ 作为上链群的系数，σ^{n+1}是K中确定了定向的$(n+1)$-维单形，在Σ中仅出现一次。易见，当$\sigma^{n+1}\in L$，因f在σ^{n+1}上已有定义，知$\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle=0\in\pi_n(Y)$，故$c^{n+1}(f)\in C^{n+1}(K,L;\pi_n(Y))$。我们称$c^{n+1}(f)$为$f$在$\overline{K}^{n+1}$上扩充的阻碍上链，简称**阻碍链**。

命题2.2　$c^{n+1}(f)\in Z^{n+1}(K,L;\pi_n(Y))$，即$\delta c^{n+1}(f)=0\in C^{n+2}(K,L;\pi_n(Y))$，其中$\delta$为相对上边沿运算。

证明　只须对任意$(n+2)$-维定向单形$\sigma_0^{n+2}\in K$，证明

$$c^{n+1}(f,\sigma_0^{n+2})\in Z^{n+1}(\sigma_0^{n+2},\ \pi_n(Y))=B^{n+1}(\sigma_0^{n+2},\ \pi_n(Y)),$$

其中

$$c^{n+1}(f,\sigma_0^{n+2})=\sum_{[\sigma_0^{n+2},\ \sigma^{n+1}]=\pm1}\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle\sigma^{n+1}.$$

记N为σ_0^{n+2}在K中的闭包复形，N^k为N的k维骨架，易见N^{n-1}在N^n内可缩成一点。事实上，若取$p\in\operatorname{Int}\sigma_0^{n+2}$，知$N^{n-1}$在锥形$pN^{n-1}$(以$P$为顶点，$N^{n-1}$为底）上可缩成一点，且通过$\sigma_0^{n+2}$的一个适当内点作投射，有映射$\xi:pN^{n-1}\to\partial\sigma_0^{n+2}$，使得$\xi|N^{n-1}=1$（恒同）；再由单纯逼近方法，得到$\xi':pN^{n-1}\to N^n$，$\xi'|N^{n-1}=1$（恒同）。故$N^{n-1}$在$N^n$内可缩成一点$x_0$，且不妨设$x_0\in N^{n-1}$。于是，如记$h=f|N^n$，根据同伦扩充性质，有$h\simeq h':N^n\to Y$，使得$h'(N^{n-1})=y_0$。

对于$\sigma^{n+1}\in K$，使得$[\sigma_0^{n+2},\sigma^{n+1}]=\pm1$，知$\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle=\langle h'_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle$，其中$h'_{\partial\sigma^{n+1}}=h'|\partial\sigma^{n+1}$。因此

$$c^{n+1}(f,\sigma_0^{n+2})=\sum_{[\sigma_0^{n+2},\ \sigma^{n+1}]=\pm1}\langle h'_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle\sigma^{n+1}.$$

设$\sigma^n\in K$为n维定向单形，$h'_{\sigma^n}=h'|\sigma^n$。由命题2.1，有

$$\langle h'_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle=\sum_{\sigma^n\in N}[\sigma^{n+1},\sigma^n]\langle h'_{\sigma^n}\rangle\in\pi_n(Y).$$

命 $b^n = \sum_{\sigma^n \in N} \langle h'_{\sigma^n} \rangle \sigma^n \in C^n(N, \pi_n(Y))$. 则

$$
\begin{aligned}
\delta b^n &= \sum_{\sigma^n \in N} \langle h'_{\sigma^n} \rangle \delta \sigma^n \\
&= \sum_{\sigma^n \in N} \langle h'_{\sigma^n} \rangle \sum_{[\sigma^{n+1}, \sigma^n] = \pm 1} [\sigma^{n+1}, \sigma^n] \sigma^{n+1} \\
&= \sum_{[\sigma_0^{n+2}, \sigma^{n+1}] = \pm 1} \left(\sum_{\sigma^n \in N} [\sigma^{n+1}, \sigma^n] \langle h'_{\sigma^n} \rangle \right) \sigma^{n+1} \\
&= c^{n+1}(f, \sigma_0^{n+2}).
\end{aligned}
$$

故

$$c^{n+1}(f, \sigma_0^{n+2}) \in B^{n+1}(\sigma_0^{n+2}, \pi_n(Y)). \text{ ▌}$$

附记 通常亦称$c^{n+1}(f)$为f的**阻碍上闭链**。而$\gamma^{n+1}(f) = [c^{n+1}(f)] \in H^{n+1}(K, L; \pi_u(Y))$称为映射$f$的**阻碍上调类**，简称**阻碍类**。

命题2.3 (i) $c^{n+1}(f) = 0$，当且仅当f可扩充至$\bar{K}^{n+1}$上；

(ii) 设$f \simeq f': \bar{K}^n \to Y$，则$c^{n+1}(f) = c^{n+1}(f')$；

(iii) 设(K', L')为有限复形偶，$\varphi: (K', L') \to (K, L)$是单纯映射，记$\tilde{f} = f\varphi: \bar{K}'^n \to Y$。则$c^{n+1}(\tilde{f}) = \varphi c^{n+1}(f)$，其中$\varphi: C^{n+1}(K, L; \pi_n(Y)) \to C^{n+1}(K', L'; \pi_n(Y))$为$\varphi$决定的上链映射。

证明 根据$\langle f_{\partial\sigma^{n+1}} \rangle$的定义，(i)与(ii)是显然的。

对于$\sigma^{n+1} \in K' - L'$，如果$\dim \varphi(\sigma'^{n+1}) < n+1$，知

$$c^{n+1}(\tilde{f})(\sigma'^{n+1}) = 0 \in \pi_n(Y),$$

即结论(iii)成立；如果$\dim \varphi(\sigma'^{n+1}) = n+1$，记$\sigma^{n+1} = \varphi(\sigma'^{n+1})$。根据定义2.1，知

$$
\begin{aligned}
c^{n+1}(\tilde{f})(\sigma'^{n-1}) &= \langle \tilde{f}_{\partial\sigma'^{n+1}} \rangle = \langle f_{\partial\sigma^{n+1}} \rangle \\
&= c^{n+1}(f)(\sigma^{n+1}) = (\varphi c^{n+1}(f))(\sigma'^{n+1}),
\end{aligned}
$$

其中$\tilde{f}_{\partial\sigma'^{n+1}} = \tilde{f}|\partial\sigma'^{n+1}$，$f_{\partial\sigma^{n+1}} = f|\partial\sigma^{n+1}$。因之结论(iii)亦

成立。▮

附记 根据(iii)，显然有$\varphi^*\gamma^{n+1}(f)=\gamma^{n+1}(\tilde{f})$，这里$\varphi^*:H^{n+1}(K,L;\pi_n(Y))\to H^{n+1}(K',L';\pi_n(Y))$是由$\varphi$诱导的同态。特别地，当取$(K',L')$是$(K,L)$的重分复形偶，且$\varphi$为恒同映射的单纯逼近，此性质表明阻碍类是重分不变的。

§3 Eilenberg扩充定理

为了弄清映射阻碍类的特征，我们要考虑两个映射f与f'：$\bar{K}^n\to Y$的关系，其中$f|\bar{K}^{n-1}=f'|\bar{K}^{n-1}$。

先作一点预备。

设σ^n是n维维定向单形，$n\geqslant1$。对I取定向$I=(0,1)$，作为"胞腔链"$\sigma^n\times I$有下边沿公式①

$$\partial(\sigma^n\times I)=(\partial\sigma^n)\times I+(-1)^n\sigma^n\times\partial I.$$

它代表$H_n(\partial(\sigma^n\times I))$的生成元，记作$\langle\partial(\sigma^n\times I)\rangle$。

记$\omega:S^n\to\partial(\sigma^n\times I)$为拓扑映射，使$\omega_*(\iota)=\langle\partial(\sigma^n\times I)\rangle$，其中$\iota\in H^n(S^n)$（见Ⅱ.§3）。

对于两个映射f_{σ^n}与$f'_{\sigma^n}:\sigma^n\to Y$，使$f_{\sigma^n}|\partial\sigma^n=f'_{\sigma^n}|\partial\sigma^n$，由下式规定映射$F_{\sigma^n}:\partial(\sigma^n\times I)\to Y$，

$$F_{\sigma^n}(x,t)=\begin{cases}f_{\sigma^n}(x), & x\in\sigma^n, \quad t=0,\\ f'_{\sigma^n}(x), & x\in\sigma^n, \quad t=1,\\ f_{\sigma^n}(x), & x\in\partial\sigma^n, \quad t\in I.\end{cases}$$

命 $\tilde{F}=F_{\sigma^n}\omega:S^n\to Y$。根据推论Ⅰ.4.9，$\tilde{F}$决定$\pi_n(Y)$中唯一的元素，记作$\langle f_{\sigma^n},f'_{\sigma^n}\rangle\in\pi_n(Y)$。

---

① 参见§4柱形剖分及[6]170页。

易见$\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle$与适合$\omega_*(\iota)=\langle\partial(\sigma^n\times I)\rangle$的拓朴映射$\omega$的选取无关．且有

引理3.1 (i) $\langle f'_{\sigma^n}, f_{\sigma^n}\rangle=-\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle$;

(ii) 如$\tau^n=-\sigma^n$，则$\langle f_{\tau^n}, f'_{\tau^n}\rangle=-\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle$;

(iii) 如$f_{\sigma^n}=f'_{\sigma^n}$，则$\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle=0$;

(iv) 如$h_t:\sigma^n\to Y$, $t\in I$，是连接f_{σ^n}与$\bar{f}_{\sigma^n}$的同伦；$h'_t:\sigma^n\to Y$, $t\in I$，是连接f'_{σ^n}与$\bar{f}'_{\sigma^n}$的同伦，且$h_t|\partial\sigma^n=h'_t|\partial\sigma^n, t\in I$．则$\langle\bar{f}_{\sigma^n}, \bar{f}'_{\sigma^n}\rangle=\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle$;

(v) 如$f_{\sigma^n}(\partial\sigma^n)=y_0=f'_{\sigma^n}(\partial\sigma^n)$，则

$$\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle=\langle f_{\sigma^n}\rangle-\langle f'_{\sigma^n}\rangle,$$

其中$\langle f_{\sigma^n}\rangle$等见§2．

证明 根据定义，(i)与(ii)是显然的．

对于(iii)，当$f_{\sigma^n}=f'_{\sigma^n}$，因$F_{\sigma^n}$可扩充至映射：$\sigma^n\times I\to Y$，可知$\tilde{F}=F_{\sigma^n}\omega:S^n\to Y$可扩充至映射：$\nabla^{n+1}\to Y$．故

$$\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle=0.$$

对于(iv)，记F_{σ^n}与$\bar{F}_{\sigma^n}$分别为$\langle f_{\sigma^n}$、$f'_{\sigma^n}\rangle$与$\langle\bar{f}_{\sigma^n}, \bar{f}'_{\sigma^n}\rangle$的定义中的映射：$\partial(\sigma^n\times I)\to Y$．命$H_t:\partial(\sigma^n\times I)\to Y\ (t\in I)$为下式规定的映射．对于$(x, s)\in\partial(\sigma^n\times I)$，命

$$H_t(x,S)=\begin{cases}h_t(x), & x\in\sigma^n,\ s=0,\\ h'_t(x), & x\in\sigma^n,\ s=1,\\ h'_s(x), & x\in\partial\sigma^n, s\in I.\end{cases}$$

知$H_0=F_{\sigma^n}$，$H_1=\bar{F}_{\sigma^n}$．故由推论Ⅰ.4.9，得到

$$\langle\bar{f}_{\sigma^n}, \bar{f}'_{\sigma^n}\rangle=\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle.$$

对于(v)，设$\sigma^n\times I\subseteq E^{n+1}, O\in\mathrm{Int}(\sigma^n\times I)$．记$\sigma_0^n=\sigma^n\times(0)$，$\sigma_1^n=\sigma^n\times(1)$．注意$\partial(\sigma^n\times I)=(\partial\sigma^n)\times I+(-1)^{n+1}(\sigma_0^n-\sigma_1^n)$，知$O\sigma_0^n$与$O\sigma_1^n$有相反的定向．根据命题Ⅱ.2.5与Ⅱ.2.1，即得到$\langle f_{\sigma^n}, f'_{\sigma^n}\rangle=\langle f_{\sigma^n}\rangle-\langle f'_{\sigma^n}\rangle$．▌

现在转入主题。

定义3.1　设 (K,L) 为有限复形偶，$\bar{K}^n$ 与 Y 等如前所述。f 与 $f':\bar{K}^n\to Y$ 为两个映射，使得 $f|\bar{K}^{n-1}=f'\bar{K}^{n-1}$。命

$$d^n(f,f')=\sum_{\sigma^n\in K}\langle f_{\sigma^n},\ f'_{\sigma^n}\rangle\sigma^n\in C^n(K,\ \pi_n(Y)),$$

其中 σ^n 是 K 中确定了定向的 n 维单形，在$\sum$中仅出现一次，$f_{\sigma^n}=f|\sigma^n$，$f'_{\sigma^n}=f'|\sigma^n$，$\langle f_{\sigma^n},\ f'_{\sigma^n}\rangle\in\pi_n(Y)$ 作为上链群的系数。易见，当 $\sigma^n\in L$，由引理 3.1 (iii)，知 $\langle f_{\sigma^n},\ f'_{\sigma^n}\rangle=0$。故 $d^n(f,f')\in C^n(K,\ L;\ \pi_n(Y))$。我们称 $d^n(f,f')$ 为 f 与 f' 在$\bar{K}^n$ 上的**差异上链**。

显然，$d^n(f,f')=0$，当且仅当有同伦 $h_t:\bar{K}^n\to Y$，使得 $h_0=f$，$h_1=f'$。

命题3.2　$\delta d^n(f,f')=c^{n+1}(f)-c^{n+1}(f')\in C^{n+1}(K,\ L;\ \pi_n(Y))$，其中 δ 为相对上边沿运算。

证明　根据δ的定义，只须对任意 $(n+1)$-维定向单形 $\sigma_0^{n+1}\in K$，证明

$$\langle f_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle-\langle f'_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle=\sum_{\sigma^n\in K}[\sigma_0^{n+1},\sigma^n]\langle f_{\sigma^n},f'_{\sigma^n}\rangle.$$

记N为 σ_0^{n+1}在K中的闭包复形.根据命题Ⅱ.2.3有$f_{\partial\sigma_0^{n+1}}\simeq f^0_{\partial\sigma_0^{n+1}}:\partial\sigma_0^{n+1}\to Y$，使得 $f^0_{\partial\sigma_0^{n+1}}(N^{n-1})=y_0$。因之

$$f_{\partial\sigma_0^{n+1}}|N^{n-1}=f'_{\partial\sigma_0^{n+1}}|N^{n-1}\simeq c(\text{常值}):N^{n-1}\to Y,$$

$$c(N^{n-1})=y_0.$$

根据 $(\partial\sigma_0^{n+1},N^{n-1})$ 的同伦扩充性质，有连接$f_{\partial\sigma_0^{n+1}}$至$\bar{f}_{\partial\sigma_0^{n+1}}$的同伦 $h_t:\partial\sigma_0^{n+1}\to Y$；连接 $f'_{\partial\sigma_0^{n+1}}$至$\bar{f}'_{\partial\sigma_0^{n+1}}$的同伦 $h'_t:\partial\sigma_0^{n+1}\to Y$，其中$\bar{f}_{\partial\sigma_0^{n+1}}(N^{n-1})=y_0=\bar{f}'_{\partial\sigma_0^{n+1}}(N^{n-1})$，$h_t|N^{n-1}=h'_t|N^{n-1}$，$t\in I$。根据在§2中$\langle f_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle$的性质 (ii)，有

$$\langle f_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle=\langle\bar{f}_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle,\qquad\langle f'_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle=\langle\bar{f}'_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle.$$

且如果σ^n是K中n维定向单形，使得$[\sigma_0^{n+1},\ \sigma^n]\neq 0$。根据引理3.1(iv)，有$\langle f_{\sigma^n},\ f'_{\sigma^n}\rangle=\langle \bar{f}_{\sigma^n},\ \bar{f}'_{\sigma^n}\rangle$，其中$\bar{f}_{\sigma^n}=\bar{f}_{\partial\sigma_0^{n+1}}|\sigma^n$，$\bar{f}'_{\sigma^n}=\bar{f}'_{\partial\sigma_0^{n+1}}|\sigma^n$。又因$\bar{f}_{\sigma^n}(\partial\sigma^n)=y_0=\bar{f}'_{\sigma^n}(\partial\sigma^n)$，故据引理3.1(v)，

$$\langle \bar{f}_{\sigma^n},\bar{f}'_{\sigma^n}\rangle=\langle \bar{f}_{\sigma^n}\rangle-\langle \bar{f}'_{\sigma^n}\rangle. \qquad (**)$$

最后，根据命题2.1有

$$\langle \bar{f}_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle=\sum_{\sigma^n\in N}[\sigma_0^{n+1},\ \sigma^n]\langle \bar{f}_{\sigma^n}\rangle,$$

$$\langle \bar{f}'_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle=\sum_{\sigma^n\in N}[\sigma_0^{n+1},\ \sigma^n]\langle \bar{f}'_{\sigma^n}\rangle.$$

将式（**）代入，即得

$$\langle f_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle-\langle f'_{\partial\sigma_0^{n+1}}\rangle=\sum_{\sigma^n\in K}[\sigma_0^{n+1},\sigma^n]\langle f_{\sigma^n},\ f'_{\sigma^n}\rangle. \ \rbrack$$

命题3.3 设$f:\bar{K}^n\to Y$，$n\geqslant 1$是映射。则对任意给定的$d^n\in C^n(K,L;\pi_n(Y))$，总存在映射$f':\bar{K}^n\to Y$，使得$f|\bar{K}^{n-1}=f'|\bar{K}^{n-1}$，且$d^n=d^n(f,f')$。

证明 设$d^n=\sum\limits_{\sigma^n\in K}a_{\sigma^n}\sigma^n\in C^n(K,\ L;\ \pi_n(Y))$，其中$a_{\sigma^n}\in\pi_n(Y)$。只须证明对任意$n$维定向单形$\sigma^n\in K-L$，有映射$f'_{\sigma^n}:\sigma^n\to Y$，使得$f'_{\sigma^n}|\partial\sigma^n=f|\partial\sigma^n$，且$a_{\sigma^n}=\langle f_{\sigma^n},\ f'_{\sigma^n}\rangle$，其中$f_{\sigma^n}=f|\sigma^n$。

为此，对于a_{σ^n}取映射$F:\partial(\sigma^n\times I)\to Y$，使得$F\omega$是$a_{\sigma^n}$的代表映射。因空间$T=\sigma^n\times(0)\cup\partial\sigma^n\times I$是可缩的，根据同伦扩充性质，知$F\simeq F':\partial(\sigma^n\times I)\to Y$，使得$F'(x,\ t)=f_{\sigma^n}(x)$，$(x,\ t)\in T$。

命$f'_{\sigma^n}:\sigma^n\to Y$为映射，使得$f'_{\sigma^n}(x)=F'(x,1)$，$x\in\sigma^n$。则$f'_{\sigma^n}$即为所求。】

推论3.4 设$f:\bar{K}^n\to Y$，$n\geqslant 1$是映射。设$z^{n+1}\in Z^{n+1}(K,\ L;\ \pi_n(Y))$，使得在$K-L$上有$z^{n+1}\sim c^{n+1}(f)$。则存在映射$f':\bar{K}^n\to Y$，使得$f|\bar{K}^{n-1}=f'|\bar{K}^{n-1}$，且$c^{n+1}(f')=z^{n+1}$。

根据命题3.2与3.3即得到此推论。】

附记　命题3.2及本推论表明，阻碍类$\gamma^{n+1}(f)$正是由一切阻碍链$c^{n+1}(f')\in Z^{n+1}(K,L;\pi_n(Y))$组成，其中$f':\bar{K}^n\to Y$为映射，使得$f'|\bar{K}^{n-1}=f|\bar{K}^{n-1}$。

§2 表明，映射$f:\bar{K}^n\to Y$能扩充至$\bar{K}^{n+1}$上的充分必要条件是$c^{n+1}(f)=0$；如果$c^{n+1}(f)\neq 0$，而$\gamma^{n+1}(f)=0$，即$c^{n+1}(f)\sim 0$（在$K-L$上），那么映射的扩充问题又怎样呢？这就是著名的 Eilenberg 扩充定理。

定理3.5（**S. Eilenberg**）设$f:\bar{K}^n\to Y$，$n\geqslant 1$是映射。则$\gamma^{n+1}(f)=0$，当且仅当存在映射$\bar{f}:\bar{K}^{n+1}\to Y$，使得$\bar{f}|\bar{K}^{n-1}=f|\bar{K}^{n-1}$。

证明　必要性　因$\gamma^{n+1}(f)=0$，即有$d^n\in C^n(K,L;\pi_n(Y))$，使得$\delta d^n=c^{n+1}(f)$。根据命题3.3，有$f':\bar{K}^n\to Y$，使得$f|\bar{K}^{n-1}=f'|\bar{K}^{n-1}$，且$d^n=d^n(f,f')$。于是$c^{n+1}(f)=\delta d^n(f,f')=c^{n+1}(f)-c^{n+1}(f')$，故$c^{n+1}(f')=0$。由命题2.3(i)，$f'$可扩充为映射$\bar{f}:\bar{K}^{n+1}\to Y$。

充分性　记$\bar{f}|\bar{K}^n=f'$。根据命题2.3与3.2，有

$$\delta d^n(f,f')=c^{n+1}(f)-c^{n+1}(f')=c^{n+1}(f).$$

故

$$\gamma^{n+1}(f)=0. \ \rbrack$$

附记　设$g:L\to Y$为映射，$f:\bar{K}^n\to Y$是g的扩充。定理表明，当$\gamma^{n+1}(f)=0$时，g必能扩充到$\bar{K}^{n+1}$上，它与f的差异仅发生在$K-L$中的n维开单形上。

§4 映射的同伦分类

如例1.4所示，映射的同伦问题是扩充问题的特别情况，本节就考虑这个重要情形。主要结论是定理4.9。

设$g:L\to Y$是映射，f与$f':K\to Y$均是g的扩充映射。问是否有连接f与f'的同伦$f_t:K\to Y$，使得$f_t|L=g$，$t\in I$。特别

地，$L=\varnothing$，即一般（绝对）同伦问题。或较广泛地说，对于f与f'是否有同伦$f_t:\bar{K}^n\to Y$（对某个$n\geqslant 1$），连接$f|\bar{K}^n$至$f'|\bar{K}^n$，且$f_t|L=g$，$t\in I$。亦记$f|\bar{K}^n\simeq f'|\bar{K}^n(\mathrm{rel}.L)$。

我们仍沿用逐步考察的“阻碍法”。

因Y是路径连通的，总有$f|\bar{K}^0\simeq f'|\bar{K}^0(\mathrm{rel}.\ L)$。以下我们设对某个$n\geqslant 1$，有$f|\bar{K}^{n-1}\simeq f'|\bar{K}^{n-1}(\mathrm{rel}.L)$，问是否有$f|\bar{K}^n\simeq f'|\bar{K}^n(\mathrm{rel}.L)$。

讨论之先，作如下几点准备。

1．设$K''\subseteq K'\subseteq K$，均为有限（单纯）复形。下述同调叙列称为三重组$(K,\ K',\ K'')$的**上调叙列**

$$\cdots\xrightarrow{j^*}H^n(K,K'';\pi)\xrightarrow{i^*}H^{n+1}(K',K'';\pi)$$
$$\xrightarrow{\delta^*}H^{n+1}(K,K';\ \pi)\xrightarrow{j^*}H^{n+1}(K,K'';\pi)\xrightarrow{i^*}\cdots,$$

其中π是系数群（交换群）；i^*与j^*分别是包含映射$i:(K',K'')\to(K,K'')$，$j:(K,\ K'')\to(K,K'')$导出的同态；上边沿同态δ^*的定义为：设$a=[z^n]\in H^n(K',\ K'';\ \pi)$。$z^n\in Z^n(K',K'';\pi)$在$C^n(K,K';\pi)$上取上边沿$\delta z^n\in Z^{n+1}(K,K';\pi)$。命$\delta^*(a)=[\delta z^n]\in H^{n+1}(K,K';\pi)$，则$\delta^*$是同态。

引理4.1　三重组(K,K',K'')的上调叙列是正合的。

证明　见[3]第一章或自己验证。】

特别地，$K''=0$时即通常复形偶(K,K')的上调正合叙列。

2．下面简记

$L_*=L\times I$，　$L_0=L\times(0)$，　$L_1=L\times(1)$，

$K_*=K\times I$，　$K_0=K\times(0)$，　$K_1=K\times(1)$，

$K_\#=L_*\cup K_0\cup K_1$，$\tilde{K}^k_*=K_\#\cup\bar{K}^{k-1}\times I$，$k=0,1,2\cdots$。

我们对K_*取适当的单纯剖分如下：对K的诸顶点取定一个顺序$v_0<v_1<\cdots<v_q<\cdots$，则$K_*$的单形有$K_0$与$K_1$的一切单形，$K_*$中一切为形如$(v'_0v'_1\cdots v'_iv''_iv''_{i+1}\cdots v''_q)$的单形及其面，其中$v'_i=(v_i,0)$，$v''_i=(v_i,1)$，而且$(v_0v_1\cdots v_q)\in K_0$，$v_0<v_1<\cdots<v_q$

（如图4.1）。

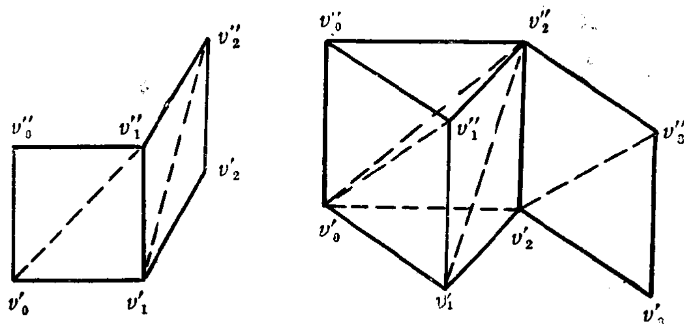


图　4.1

易见此时K_*为有限复形，以K_0，K_1，L_*,$K_\#$等为其子复形。记K_*^k为K_*对这个单纯剖分而言的k维骨架，$\bar{K}_*^k=K_\#\cup K_*^k$．于是

（i）$\tilde{K}_*^k\subseteq\bar{K}_*^k$，$k=0,1,2,\cdots$；

（ii）$\tilde{K}_*^k$是$\bar{K}_*^k$的收缩核．有保核收缩映射$r_k:\bar{K}_*^k\to\tilde{K}_*^k$，满足：

（iii）$\tilde{K}_*^k$在K_*中有形变$d_t:\bar{K}_*^k\to K_*$，$t\in I$，使得d_0为包含映射，$d_1=ir_k$，$d_t|\bar{K}_*^k=1$（恒同），$t\in I$，其中$i:\tilde{K}_*^k\subseteq K_*$．（细节自己补．）

引理4.2　记$i:(\tilde{K}_*^k,K_\#)\to(K_*,K_\#)$是包含映射，则$i^*:H^k(K_*,K_\#;\pi)\to H^k(\tilde{K}_*^k,K_\#;\pi)$是在中同构，$k=0,1,2,\cdots$．

证明　注意图表

$$\begin{array}{ccc} H_k(K_*,K_\#;\pi) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\widetilde{K}_*^k,K_\#;\pi) \\ & d_0^*=d_1^*\searrow \quad \swarrow r_k^* & \\ & H^k(\bar{K}_*^k,K_\#;\pi) & \end{array}$$

的交换性，而d_0^*显然是在中同构，故i^*是在中同构．】

3．记$\Theta:(K,L)\to(K_0,L_0)$为同胚映射，使得$\Theta(x)=(x,$

0), $x\in K$. 知 $\Theta^*:H^k(K_0,L_0;\pi)\approx H^k(K,L;\pi)$, $k=0,1,2,\cdots$. 而包含映射 $j:(K_0,L_0)\to(K_\#,L_*\cup K_1)$ 导出的同态 $j^*:H^k(K_\#,L_*\cup K_1;\pi)\to H^k(K_0,L_0;\pi)$ 亦是一个同构，$k=0,1,2,\cdots$. (因 $K_\#-L_*\cup K_1=K_0-L_0$).

设 $\delta^*:H^k(K_\#,L_*\cup K_1;\pi)\to H^{k+1}(K_*,K_\#;\pi)$ 是三重组 $(K_*,K_\#,L_*\cup K_1)$ 上调叙列中的上边沿同态。命

$$D=\delta^*(j^*)^{-1}(\Theta^*)^{-1}:H^k(K,L;\pi)\to H^{k+1}(K_*,K_\#;\pi),$$
$$k=0,1,2,\cdots.$$

引理4.3 同态 D 是一个同构。即

$$D:H^k(K,L;\pi)\approx H^{k+1}(K_*,K_\#;\pi),\quad k=0,1,2,\cdots.$$

证明 只须指出 δ^* 是同构。

事实上，因 $L_*\cup K_1$ 是 K_* 的形变收缩核（见命题Ⅰ.4.2或见[4]16页），知包含映射 $i_1:L_*\cup K_1\to K_*$ 导出同构 $i_1^*:H^k(K_*,\pi)\approx H^k(L_*\cup K_1,\pi)$，$k=0,1,2,\cdots$.

因之，在复形偶 $(K_*,L_*\cup K_1)$ 的上调叙列中，有 $H^k(K_*,L_*\cup K_1;\pi)=0$, $k=0,1,2,\cdots$. 再对三重组 $(K_*,K_\#,L_*\cup K_1)$ 运用引理4.1，知 δ^* 是同构。】

现在转入本节的主题。

设 f 与 $f':K\to Y$ 是映射 $g:L\to Y$ 的扩充映射，有同伦 $f_t:\bar{K}^{n-1}\to Y$, $n\geqslant 1$, $t\in I$, 使得 $f_0=f|\bar{K}^{n-1}$, $f_1=f'|\bar{K}^{n-1}$, $f_t|L=g$, $t\in I$. 我们考虑在 $\bar{K}^n$ 上的同伦问题。

仿照§3，我们首先给出 f, f' 及 f_t 的形变链的概念。为此，对任给的 n 维定向单形 $\sigma^n\in K$，取 ω 与 $\langle\partial(\sigma^n\times I)\rangle$ 如§3所述。设 $F_{\sigma^n}:\partial(\sigma^n\times I)\to Y$ 为映射，知 $F_{\sigma^n}\omega:S^n\to Y$ 决定 $\pi_n(Y)$ 中唯一的元素，记作 $\langle F_{\sigma^n}\rangle\in\pi_n(Y)$，它与 ω 的选取无关。

命 $G:K_\#\to Y$ 为映射，使得

$$G(x,t)=\begin{cases}g(x), & (x,t)\in L_*,\\ f(x), & (x,t)\in K_0,\\ f'(x), & (x,t)\in K_1.\end{cases}$$

又命　$F:\tilde{K}_*^n \to Y$为映射，使得

$$F(x,t)=\begin{cases} f_t(x), & (x,t)\in \bar{K}^{n-1}\times I, \\ f(x), & (x,t)\in K_0, \\ f'(x), & (x,t)\in K_1. \end{cases}$$

则 F 是 G 的扩充。

定义4.1　设 f，f' 与 f_t 如上所述。命

$$d^n(f,f';f_t)=\sum_{\sigma^n\in K}\langle F_{\sigma^n}\rangle\sigma^n\in C^n(K,\pi_n(Y)),$$

其中 σ^n 是 K 中确定了定向的 n 维单形，在 $\sum$ 中仅出现一次，$F_{\sigma^n}=F|\partial(\sigma^n\times I)$，$\langle F_{\sigma^n}\rangle\in\pi_n(Y)$ 是上链群的系数。易见，当 $\sigma^n\in L$，$\langle F_{\sigma^n}\rangle=0$。故 $d^n(f,f';f_t)\in C^n(K,L;\pi_n(y))$，并称为 f 与 f' 对同伦 f_t 的形变上链，简称**形变链**。

特别地，当 $f|\bar{K}^{n-1}=f'|\bar{K}^{n-1}$，取 $f_t=f|\bar{K}^{n-1}$，$t\in I$，则有 $d^n(f,f';f_t)=d^n(f,f'')$。

一般的情形，有

命题4.4　设 f,f' 与 f_t 如前所述。则存在映射 $f'':\bar{K}^n\to Y$，使 $f''|\bar{K}^{n-1}=f|\bar{K}^{n-1}$，且 $f''\simeq f':\bar{K}^n\to Y$ 及 $d^n(f,f';f_t)=d^n(f,f'')$。

证明　记 $\tilde{K}=\bar{K}^n\times(0)\cup\bar{K}^{n-1}\times I\subseteq\tilde{K}_*^n$。

命η_t: $\tilde{K}\to\tilde{K}$为同伦映射，$t\in I$，使得

$$\eta_t(x,s)=\begin{cases}(x,0), & (x,s)\in\bar{K}^n\times(0), \\ (x,(1-t)s), & (x,s)\in\bar{K}^{n-1}\times I.\end{cases}$$

知 $\bar{K}^n\times(0)$是$\tilde{K}$的形变收缩核。

因 $\xi_t=F\eta_t:\tilde{K}\to Y$ 是部分映射 $F|\tilde{K}$的同伦，根据同伦扩充性质，有同伦 $\xi_t':\tilde{K}_*^n\to Y$，$t\to I$，使得$\xi_0'=F$。

命 $F'=\xi_1':\tilde{K}_*^n\to Y$，$f'':\bar{K}^n\to Y$，使得 $f''(x)=\xi_1'(x,1)$，$x\in\bar{K}^n$。易见f''为所求的映射。▌

命题4.5　$d^n(f,f';f_t)\in Z^n(K,L;\pi_n(Y))$。即

$$\delta d^n(f,f';f_t)=0\in C^{n+1}(K,L;\pi_n(Y)).$$

证明 设$f'': \bar{K}^n \to Y$是适合命题4.4要求的映射，根据命题3.2与2.3，则

$$\delta d^n(f,f';f_t) = \delta d^n(f,f'') = c^{n+1}(f) - c^{n+1}(f'')$$
$$= c^{n+1}(f) - c^{n+1}(f') = 0(\text{因}f\text{与}f'\text{均可扩充})。\rbrack$$

附记 形变上闭链$d^n(f,f';f_t)$所代表的上调类称为f与f'对同伦f_t的**形变类**，记为

$$\triangle^n(f,f';f_t) \in H^n(K,L;\pi_n(y))。$$

现在我们来给出形变类的另一种表示。

设$r_n: \bar{K}^n_* \to \tilde{K}^n_*$是保核收缩映射如前（见预备2.），知映射$F: \tilde{K}^n_* \to Y$有扩充映射$F' = Fr_n: \bar{K}^n_* \to Y$。根据§3，对$F'$有阻碍类$\gamma^{n+1}(F') \in H^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))$。

引理4.6 阻碍类$\gamma^{n+1}(F')$与F的扩充映射F'的选取无关。以后记$\gamma^{n+1}(F) = \gamma^{n+1}(F') \in H^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(y))$。

证明 设$F'': \bar{K}^n_* \to Y$是F的另一个扩充映射。因$\bar{K}^{n-1}_* \subseteq \tilde{K}^n_*$，$F'|\bar{K}^{n-1}_* = F|\bar{K}^{n-1}_* = F''|\bar{K}^{n-1}_*$，有

$$c^{n+1}(F') - c^{n+1}(F'') = \delta d^n(F',F'') \in B^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))。$$

故 $\gamma^{n+1}(F') = \gamma^{n+1}(F'')$。$\rbrack$

命题4.7 设f，f'，f_t与F如上述，则

$$D\triangle^n(f,f';f_t) = (-1)^{n+1}\gamma^{n+1}(F) \in H^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))。$$

证明 对n维定向单形$\sigma^n \in K-L$，有唯一的$(n+1)$-维定向单形$\Gamma(\sigma^n) \in \sigma^n \times I$，它以$\sigma^n_0 = \sigma^n \times (0)$为面。存在映射$d: \sigma^n \times I - \mathrm{Int}\,\Gamma(\sigma^n) \to \partial(\sigma^n \times I)$，它将$\partial\Gamma(\sigma^n)$同胚映射至$\partial(\sigma^n \times I)$，$d|\partial(\sigma^n \times I) = 1$(恒同)（例如在$\Gamma(\sigma^n)$中取适当内点作投射即可），且使得$d' = d|\partial\Gamma(\sigma^n): \partial\Gamma(\sigma^n) \to \partial(\sigma^n \times I)$，$d'_*(\langle\partial\Gamma(\sigma^n)\rangle) = \langle\partial(\sigma^n \times I)\rangle$，其中$\Gamma(\sigma^n)$已定向，$\langle\partial\Gamma(\sigma^n)\rangle$为$\partial\Gamma(\sigma^n)$代表$H_n(\partial\Gamma(\sigma^n)) \approx J$的生成元，$\langle\partial(\sigma^n \times I)\rangle \in H_n(\partial\sigma^n \times I))$（见§3）。

记$\Phi_{\partial\Gamma(\sigma^n)}=F_{\sigma^n}d':\partial\Gamma(\sigma^n)\to Y$。根据§2，$\Phi_{\partial\Gamma(\sigma^n)}$决定$\langle\Phi_{\partial\Gamma(\sigma^n)}\rangle\in\pi_n(Y)$。不难验证

（i）$\langle F_{\sigma^n}\rangle=\langle\Phi_{\partial\Gamma(\sigma^n)}\rangle\in\pi_n(Y)$；

（ii）关联系数$[\Gamma(\sigma^n),\ \sigma_0^n]=(-1)^{n+1}$；

（iii）在$\tilde{K}_*^{n+1}$上，$\sigma_0^n\in C^n(\tilde{K}_*^{n+1},K_\#;\pi_n(Y))$的上边沿是$(-1)^{n+1}\Gamma(\sigma^n)$；

（iv）进一步，可要求d适合$d|\sigma^n\times I\cap\bar{K}_*^n=r_n|\sigma^n\times I\cap\bar{K}_*^n$，其中$r_n:\bar{K}_*^n\to\tilde{K}_*^n$为保核收缩映射。

于是，对于$c^{n+1}(F')=c^{n+1}(Fr_n)\in Z^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))$，知（在$\tilde{K}_*^{n+1}-K_\#$上考虑）

$$i_1^*(c^{n+1}(F'))=\sum_{\sigma^n\in K}\langle F_{\sigma^n}\rangle\Gamma(\sigma^n)=\sum_{\sigma^n\in K}(-1)^{n+1}\delta(\langle F_{\sigma^n}\rangle\sigma^n)$$

$$=i_1^*\delta(-1)^{n+1}d^n(f,f';f_t)\in Z^{n+1}(\tilde{K}_*^{n+1},K_\#;\ \pi_n(Y)),$$

其中$i_1^*:Z^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))\to Z^{n+1}(\tilde{K}_*^{n+1},K_\#;\ \pi_n(Y))$是由包含映射$i_1:(\tilde{K}_*^{n+1},\ K_\#)\to(K_*,K_\#)$导出的同态。

根据引理4.2，得到

$$\gamma^{n+1}(F)=(-1)^{n+1}D(\triangle^n(f,f';\ f_t))。\rbrack$$

附记　本命题描述了形变链(类)与阻碍链(类)的关系。

显然，对形变链，根据定义有

命题4.8　设f,f'与f_t如定义4.1．则同伦$f_t:f|\bar{K}^{n-1}\simeq f'|\bar{K}^{n-1}(\text{rel.}L)$可扩充至$\bar{f}_t:\bar{K}^n\to Y$，$t\in I$，当且仅当

$$d^n(f,f';f_t)=0\in Z^n(K,L;\pi_n(Y))。\rbrack$$

与§3类似，考虑当$d^n(f,f';f_t)\neq0$，而$\triangle^n(f,f';f_t)=0$时的扩充问题，即f与f'的同伦问题。相应的结论便是Eilenberg同伦定理。

定理4.9（S. Eilenberg）　设映射f与$f':K\to Y$是映射g

$L\to Y$ 的扩充。又设对某个 $n\geqslant 1$，$f_t:\bar{K}^{n-1}\to Y$ 是连接 $f|\bar{K}^{n-1}$ 到 $f'|\bar{K}^{n-1}$ 的同伦，使得 $f_t|L=g$，$t\in I$。则

$$\triangle^n(f,f';f_t)=0\in H^n(K,L;\pi_n(Y)),$$

当且仅当存在同伦 $\bar{f}_t:\bar{K}^n\to Y$，连接 $f|\bar{K}^n$ 到 $f'|\bar{K}^n$，且

$$\bar{f}_t|\bar{K}^{n-2}=f_t|\bar{K}^{n-2},\ t\in I.$$

证明　命 $G:K_\#\to Y$，$F:\tilde{K}_*^n\to Y$ 如前，只须证明 $\gamma^{n+1}(F)=0\in H^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))$ 的充分必要条件是：G 有扩充映射 $\bar{F}:\tilde{K}_*^{n+1}\to Y$，使得 $\bar{F}|\tilde{K}_*^{n-1}=\bar{F}|\tilde{K}_*^{n-1}$。

必要性　设 $\gamma^{n+1}(F)=\gamma^{n+1}(F')=0$，其中 $F'=Fr_n:\bar{K}_*^n\to Y$，$r_n:\bar{K}_*^n\to\tilde{K}_*^n$ 是保核收缩映射。根据 Eilenberg 扩充定理 3.5，存在映射 $H:\bar{K}_*^{n+1}\to Y, H|\bar{K}_*^{n-1}=F'|\bar{K}_*^{n-1}=F|\bar{K}_*^{n-1}$。显然命 $\bar{F}=H|\tilde{K}_*^{n+1}$ 即为所求之映射。

充分性　设有映射 $\bar{F}:\tilde{K}_*^{n+1}\to Y$，使得 $\bar{F}:\tilde{K}_*^{n-1}=F:\tilde{K}_*^{n-1}$。根据预备知识 2，$\bar{K}_*^{n+1}$ 在 K_* 中有形变 $d_t:\bar{K}_*^{n+1}\to K_*$，$t\in I$，使得 $d_t|\tilde{K}_*^n=1$（恒同）；$d_0:\bar{K}_*^{n+1}\to K_*$ 是包含映射，$d_1(\bar{K}_*^{n+1})\subseteq\tilde{K}_*^{n+1}$。命 $\bar{F}'=\bar{F}d_1:\bar{K}_*^{n+1}\to Y$，$F'=Fd_1':\bar{K}_*^n\to Y$，其中 $d_1'=d_1|\bar{K}_*^n$，知 $\bar{F}'|\bar{K}_*^{n-1}=F'|\bar{K}_*^{n-1}$。由定理3.5，有

$$\gamma^{n+1}(F)=\gamma^{n+1}(F')=0. \ ]$$

附记　设 f 与 $f':K\to Y$ 是 $g:L\to Y$ 的扩充映射，$f_t:f|\bar{K}^{n-1}\simeq f'|\bar{K}^{n-1}(\text{rel}.L)$。则定理表明，当 $\triangle^n(f,f';f_t)=0$，必有 $\bar{f}_t:f|\bar{K}^n\simeq f'|\bar{K}^n(\text{rel}.L)$，而 $\bar{f}_t$ 与 f_t 的差异仅发生在 $K-L$ 中 $(n-1)$-维开单形上。

§5　(n－1)-连通空间上映射的扩充与同伦

本节将运用“阻碍法”来考虑当 Y 是 $(n-1)$-连通空间时，映射 $g:L\to Y$ 的扩充问题及 f 与 $f':K\to Y$ 的同伦问题。特别地，当 K 是 n 维复形及 $Y=S^n$，得到 Hopf 分类定理。

以下假定(K,L)是有限复形偶，Y 对某个 $n\geqslant 1$ 是$(n-1)$-连通空间。当 $n=1$ 时并设Y是 1-单式的；当然，当 $n>1$ 时，Y是 m-单式的，$m=1,2,3,\cdots$。

命题5.1 设 K,L 与 $\bar{K}^n$ 如前所述，则对任意映射 $g:L\to Y$，均可扩充至映射 $f:\bar{K}^n\to Y$，简称 g 在K上有 **n-扩充**。

证明 如§1 所指出，g 总可扩充为 $g_0:\bar{K}^0\to Y$ 与 $g_1:\bar{K}^1\to Y$。一般地，如果对 k：$1\leqslant k<n$，g 有扩充映射 $g_k:\bar{K}^k\to Y$，则因 $\pi_k(Y)=0$，$H^{k+1}(K,L;\pi_k(Y))=0$，知 $\gamma^{k+1}(g_k)=0$。根据定理 3.5，g 有扩充映射 $g_{k+1}:\bar{K}^{k+1}\to Y$。照此法直至得到 g 的扩充映射 $g:\bar{K}^n\to Y$，取 $f=g_n$ 即得到命题的结论.]

命题5.2 设映射 f 与 $f':K\to Y$ 是映射 $g:L\to Y$ 的扩充，则有连接 $f|\bar{K}^{n-1}$至 $f'|\bar{K}^{n-1}$的同伦 $f_t:\bar{K}^{n-1}\to Y$，使得 $f_t|L=g$，$t\in I$。简称 f 与 f' 在K 上是**(n-1)-同伦**(rel. L)。

证明 因Y是路径连通的，知 $f|\bar{K}_0\simeq f'|\bar{K}^0$(rol. L)。一般地，如果对k：$1\leqslant k<n$，有$g_t:f|\bar{K}^{k-1}\simeq f'|\bar{K}^{k-1}$(rel. L)，$t\in I$，则因 $\pi_k(Y)=0$，知$\triangle^k(f,f';g_t)=0$ $(H^k(K,L;\pi_k(Y))=0)$。根据定理 4.9，有 $f_t:f|\bar{K}^k\simeq f'|\bar{K}^k$(rel. L)，$t\in I$。照此法直至 $k=n$，即 $f|\bar{K}^{n-1}\simeq f'|\bar{K}^{n-1}$(rel. L)。]

定义5.1 设 $g:L\to Y$ 为映射，$f:\bar{K}^n\to Y$ 是 g 在K 上的 n-扩充。则命 $\omega^{n+1}(g)=\gamma^{n+1}(f)\in H^{n+1}(K,L;\pi_n(Y))$，称为映射 g 在K 上扩充的**最初阻碍类**。

易见，$\omega^{n+1}(g)$与 g 的扩充 f 的选取无关。

事实上，如 f 与 $f':\bar{K}^n\to Y$ 均为g 的扩充映射，则由命题5.2知 $f|\bar{K}^{n-1}\simeq f'|\bar{K}^{n-1}$(rel. L)。根据命题4.4，不妨设 $f|\bar{K}^{n-1}=f'|\bar{K}^{n-1}$，于是有 $d^n(f,f')\in C^n(K,L;\pi_n(Y))$，使得

$$\delta d^n(f,f')=c^{n+1}(f)-c^{n+1}(f')。$$

故 $\gamma^{n+1}(f)=\gamma^{n+1}(f')$。

附记 $\omega^{n+1}(g)$之称为g 的最初阻碍类，因为g 有 n-扩

充，即低于$(n+1)$-维阻碍类皆是平凡的。

命题5.3 （i）$\omega^{n+1}(g)=0$，当且仅当g可扩充至$\bar{K}^{n+1}$上；

(ii) 设$g\simeq g':L\to Y$，则$\omega^{n+1}(g)=\omega^{n+1}(g')$；

(iii)设(K',L')是有限复形偶，$\varphi:(K',L')\to(K,L)$是单纯映射。记$\tilde{g}=g\varphi:L'\to Y$。则$\omega^{n+1}(\tilde{g})=\varphi^*\omega^{n+1}(g)$，其中$\varphi^*$: $H^{n+1}(K,L;\pi_n(Y))\to H^{n+1}(K',L';\pi_n(Y))$是由$\varphi$诱导的同态。

证明 由Eilenberg扩充定理3.5即得到(i)。

设$f:\bar{K}^n\to Y$是g的扩充映射，根据同伦扩充性质，有$f\simeq f'$: $\bar{K}^n\to Y$，其中f'是g'的扩充映射。根据命题2.3，$c^{n+1}(f)=c^{n+1}(f')$。故$\omega^{n+1}(g)=\omega^{n+1}(g')$，即得到(ii)。

设$f:\bar{K}^n\to Y$是g的扩充映射，知$\tilde{f}=f\varphi:\bar{K}'^n\to Y$是$\tilde{g}$的扩充映射。根据命题2.3，$c^{n+1}(\tilde{f})=\varphi c^{n+1}(f)$。

故 $\omega^{n+1}(\tilde{g})=\varphi^*\omega^{n+1}(g)$，即得到(iii)。▌

定义5.2 设f与$f':K\to Y$是$g:L\to Y$的扩充映射，f_t是f与f'在K上的$(n-1)$-同伦(rel.L)。则命$\kappa^n(f,f')=\triangle^n(f,f';f_t)\in H^n(K,L;\pi_n(Y))$。

易见，$\kappa^n(f,f')$的定义与f,f'在K上的$(n-1)$-同伦(rel.L) f_t的选取无关。

事实上，设$G:K_\#\to Y$与$F:\tilde{K}^n_*\to Y$均为映射，如§4。因F有扩充映射$F':\bar{K}^n_*\to Y$，且$\omega^{n+1}(G)=\gamma^{n+1}(F)=\gamma^{n+1}(F')\in H^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))$，而由命题4.7，则有

$$\begin{aligned}\kappa^n(f,f')&=\triangle^n(f,f';f_t)=(-1)^{n+1}D^{-1}(\gamma^{n+1}(F'))\\&=(-1)^{n+1}D^{-1}(\omega^{n+1}(G)),\end{aligned}$$

其中$D:H^n(K,L;\pi_n(Y))\approx H^{n+1}(K_*,K_\#;\pi_n(Y))$。可见$\kappa^n(f,f')$与$f_t$的选取无关。

命题5.4 设f与$f':K\to Y$是$g:L\to Y$的扩充映射，则

（i）$\kappa^n(f,f')=0\in H^n(K,L;\pi_n(Y))$，当且仅当$f$与$f'$在$K$上$n$-同伦(rel.$L$)；

(ii)设 $h_t: K \to Y$ 是连接 f 至 $\bar{f}: K \to Y$ 的同伦，$h'_t: K \to Y$ 是连接 f' 至 $\bar{f}': K \to Y$ 的同伦，且 $h_t|L = h'_t|L$，$t \in I$。则

$$\kappa^n(f, f') = \kappa^n(\bar{f}, \bar{f}').$$

(iii)如 $f'': K \to Y$ 亦是 g 的扩充映射，则

$$\kappa^n(f, f'') = \kappa^n(f, f') + \kappa^n(f', f'').$$

证明　(i)　记 $G: K_{\#} \to Y$ 如前，则

$$\begin{aligned}\kappa^n(f, f') = 0 &\Longleftrightarrow \omega^{n+1}(G) = 0\\ &\Longleftrightarrow G \text{ 可扩充至 } \bar{K}_*^{n+1} \text{ 上}\\ &\Longleftrightarrow G \text{ 可扩充至 } \tilde{K}_*^{n+1} \text{ 上}\\ &\Longleftrightarrow f \text{ 与 } f' \text{ 在 } K \text{ 上 } n\text{-同伦}(\mathrm{rel}.L).\end{aligned}$$

(ii)记 $\bar{G}: K_{\#} \to Y$ 为映射，使得

$$\bar{G}(x,t) = \begin{cases} h'_t(x), & (x,t) \in L_*,\\ \bar{f}(x), & (x,t) \in K_0,\\ \bar{f}'(x), & (x,t) \in K_1. \end{cases}$$

又命 $H_t: K_{\#} \to Y, t \in I$，为下式所规定的同伦映射

$$H_t(x,s) = \begin{cases} h_s(x), & (x,s) \in L_*,\\ h_t(x), & (x,s) \in K_0,\\ h'_t(x), & (x,s) \in K_1. \end{cases}$$

易见 H_t 是连接 G 至 $\bar{G}$ 的同伦，根据命题 5.3 (ii)，得

$$\omega^{n+1}(G) = \omega^{n+1}(\bar{G}) \in H^{n+1}(K_*, K_{\#}; \pi_n(Y)).$$

故　$$\kappa^n(f, f') = \kappa^n(\bar{f}, \bar{f}').$$

(iii) 因 $f \simeq \bar{f}: K \to Y$，使得 $\bar{f}(K^{n-1}) = y_0$。记 $\bar{g} = \bar{f}|L$，知 $g \simeq \bar{g}: L \to Y$。运用同伦扩充性质，得到

$$f' \simeq \bar{f}': K \to Y, \quad \text{使 } \bar{f}'(\bar{K}^{n-1}) = \bar{f}(\bar{K}^{n-1});$$

$$f'' \simeq \bar{f}'': K \to Y, \quad \text{使 } \bar{f}''(\bar{K}^{n-1}) = \bar{f}(\bar{K}^{n-1}).$$

于是，由(ii)有

$$\begin{aligned}\kappa^n(\bar{f}, \bar{f}') &= \kappa^n(f, f'),\\ \kappa^n(\bar{f}', \bar{f}'') &= \kappa^n(f', f''),\\ \kappa^n(\bar{f}, \bar{f}'') &= \kappa^n(f, f'').\end{aligned}$$

而根据差异链定义及引理3.1(v)有

$$d^n(\bar{f},\bar{f}'')=d^n(\bar{f},\bar{f}')+d^n(\bar{f}',\bar{f}'').$$

故

$$\kappa^n(\bar{f},\bar{f}'')=\kappa^n(\bar{f},\bar{f}')+\kappa^n(\bar{f}',\bar{f}'').\ \rbrack$$

定义5.3 记 $c:L\to Y$ 是常值映射，$c(L)=y_0$。对任意映射 $g:L\to Y$，考虑复形偶$(L,\varnothing)$，命

$$\kappa^n(g)=\kappa^n(g;c)\in H^n(L,\pi_n(Y)),$$

并称为映射 g 的**特征类**。

我们注意到，因有 $g_t:g|L^{n-1}\simeq c|L^{n-1}$（命题5.2的特例），根据同伦扩充性质，$g\simeq\bar{g}:L\to Y$，使得$\bar{g}(L^{n-1})=y_0$。根据定义3.1及引理3.1(v)，有

$$d^n(\bar{g},c)=\sum_{\sigma^n\in L}\langle\bar{g}_{\sigma^n},c_{\sigma^n}\rangle\sigma^n=\sum_{\sigma^n\in L}\langle\bar{g}_{\sigma^n}\rangle\sigma^n\in C^n(L,\pi_n(Y)),$$

其中 $\bar{g}_{\sigma^n}=\bar{g}|\sigma^n$，$c_{\sigma^n}=c|\sigma^n$。由命题3.2有

$$d^n(\bar{g},\ c)\in Z^n(L,\ \pi_n(Y)).$$

命题5.5 $\kappa^n(g)=[d^n(\bar{g},c)]\in H^n(L,\pi_n(Y))$。

证明 根据定义及命题4.4是显然的。】

关于特征类与最初阻碍类，有其重要的关系。

命题5.6 设 $g:L\to Y$ 为映射．则

$$\delta^*\kappa^n(g)=\omega^{n+1}(g)\in H^{n+1}(K,L;\pi_n(Y)),$$

其中 $\delta^*:H^n(L,\pi_n(Y))\to H^{n+1}(K,L;\pi_n(Y))$是上边沿同态。

证明 设 $f:\bar{K}^n\to Y$ 是 g 的扩充映射.根据命题5.2,在 $\bar{K}^n$上有 $f|K^{n-1}\simeq c:K^{n-1}\to Y$，$c(K^{n-1})=y_0$[对空间偶$(K^n,\varnothing)$]。利用同伦扩充性质，得 $f\simeq\bar{f}:\bar{K}^n\to Y$，使得 $\bar{f}(K^{n-1})=y_0$。记 $\bar{g}=\bar{f}|L$，知 $g\simeq\bar{g}:L\to Y$，$\bar{g}(L^{n-1})=y_0$。

根据命题5.3与5.4，欲证本命题只须指出

$$\delta^*\kappa^n(\bar{g})=\omega^{n+1}(\bar{g}).$$

为此，记 $i:(K,L)\to(K,\ \bar{K}^n)$为包含映射，知图表

$$\begin{array}{ccc} H^n(L,\pi_n(Y)) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(K,L;\pi_n(Y)) \\ \uparrow i^* & & \uparrow i^* \\ H^n(\bar{K}^n,\pi_n(Y)) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(K,\bar{K}^n;\pi_n(Y)) \end{array}$$

中交换性成立。

考虑 $\kappa^n(\bar{f})\in H^n(\bar{K}^n,\pi_n(Y)$，则根据命题5.3(iii)有

$$i^*\omega^{n+1}(\bar{f})=\omega^{n+1}(\bar{g}),\quad i^*\kappa^n(\bar{f})=\kappa^n(\bar{g}).$$

根据命题 5.5 与 1.1，如记

$$d^n(\bar{f},c)=\sum_{\sigma^n\in K}\langle\bar{f}_{\sigma^n}\rangle\sigma^n\in Z^n(\bar{K}^n,\pi_n(Y)).$$

知

$$\begin{aligned}\delta d^n(\bar{f},c)&=\sum_{\sigma^{n+1},\,\sigma^n\in K}[\sigma^{n+1},\sigma^n]\langle\bar{f}_{\sigma^n}\rangle\sigma^{n+1}\\&=\sum_{\sigma^{n+1}\in K}\langle\bar{f}_{\partial\sigma^{n+1}}\rangle\sigma^{n+1}\\&=c^{n+1}(\bar{f})\in Z^{n+1}(K,\bar{K}^n;\pi_n(Y))\end{aligned}$$

从而 $\delta^*\kappa^n(\bar{f}))=\omega^{n+1}(\bar{f})$。故

$$\omega^{n+1}(\bar{g})=i^*\omega^{n+1}(\bar{f})=i^*\delta^*(\kappa^n(\bar{f}))=\delta^*\kappa^n(\bar{g}).$$ 】

推论5.7 设 $g:L\to Y$ 是映射，则 g 可扩充至映射 $f:\bar{K}^{n+1}\to Y$，当且仅当有 $a^n\in H^n(K,\pi_n(Y))$，使得 $i^*(a^n)=\kappa^n(g)$，其中 i^* 是由包含映射 $i:L\to K$ 导出的同态。

证明 根据命题 5.3，5.6 及 (K, L) 的上调正合叙列即可得到。】

附记 推论的条件亦称特征类 $\kappa^n(g)$ 可扩充至 K 上。

定理5.8 设 (K,L) 为有限复形偶；$\dim(K-L)\leqslant n+1$；Y

是$(n-1)$-连通空间，当$n=1$时，Y是1-单式的。设$f:K\to Y$为映射。则对任意$\beta^n\in H^n(K,L;\pi_n(Y))$，总存在$f|L$的扩充映射$f':K\to Y$，使$\kappa^n(f,f')=\beta^n$。

证明 因$f\simeq\bar{f}:K\to Y$，使得$\bar{f}(K^{n-1})=y_0$。利用同伦扩充性质，欲证本定理只须指出，存在$\bar{f}|L$的扩充映射$\bar{f}':K\to Y$，使$\kappa^n(\bar{f},\bar{f}')=\beta^n$。

令$z^n=\sum\limits_{\sigma^n\in K-L}\beta_{\sigma^n}\sigma^n\in Z^n(K,L;\pi_n(Y))$是$\beta^n$的代表上闭链，其中$\beta_{\sigma^n}\in\pi_n(Y)$。对$\sigma^n\in K-L$，取$\bar{f}'_{\sigma^n}:(\sigma^n,\partial\sigma^n)\to(Y,y_0)$为映射，使得$\langle\bar{f}'_{\sigma^n}\rangle=\langle\bar{f}_{\sigma^n}\rangle-\beta_{\sigma^n}$。

由于$\bar{f}'_{\sigma^n}$有扩充映射$\tilde{f}':\bar{K}^n\to Y$，使得$\tilde{f}'|L=\bar{f}|L$。记

$$d^n(\bar{f},c)=\sum_{\sigma^n\in K}\langle\bar{f}_{\sigma^n}\rangle\sigma^n\in Z^n(K,\pi_n(Y))$$如前所述，以及

$$e^n(\tilde{f}')=\sum_{\sigma^n\in K}\langle\tilde{f}'_{\sigma^n}\rangle\sigma^n\in C^n(K,\pi_n(Y)),$$

知$e^n(\tilde{f}')=d^n(\bar{f},c)-z^n$，从而$\delta e^n(\tilde{f}')=0$。

因$\bar{f}|\bar{K}^{n-1}=\tilde{f}'|\bar{K}^{n-1}$，考虑差异链

$$d^n(\bar{f},\tilde{f}')=\sum_{\sigma^n\in K}\langle\bar{f}_{\sigma^n},\tilde{f}'_{\sigma^n}\rangle\sigma^n\in C^n(K,L;\pi_n(Y)),$$

且

$$d^n(\bar{f},\tilde{f}')=d^n(\bar{f},c)-e^n(\tilde{f}')=z^n.$$

于是，由$\delta d^n(\bar{f},\tilde{f}')=0$，知$c^{n+1}(\tilde{f}')=c^{n+1}(\bar{f})=0$。故$\tilde{f}'$在$K=\bar{K}^{n+1}$上有扩充映射$\bar{f}':K\to Y$。因之$d^n(\bar{f},\bar{f}')=d^n(\bar{f},\tilde{f}')=z^n$是$\kappa^n(\bar{f},\bar{f}')$的代表上闭链，即$\kappa^n(\bar{f},\bar{f}')=\beta^n$。】

定理5.9 假设同定理5.8，且如果f'与$f'':K\to Y$均是$f|L$的扩充。则f'与f''在K上n-同伦(rel.L)，当且仅当

$$\kappa^n(f,f')=\kappa^n(f,f'').$$

证明 由命题5.4(i)与(iii),有

$$f'\text{与}f''\text{在}K\text{上}\ n\text{-同伦}(\mathrm{rel}.L)\Longleftrightarrow\kappa^n(f',f'')=0$$
$$\Longleftrightarrow\kappa^n(f,f')=\kappa^n(f,f'').\ ▌$$

作为上述两个重要定理的特别情形，在 $\dim K\leqslant n$ 时，即得下面的定理。

定理5.10 设 K 为有限(单纯)复形; $\dim K\leqslant n$; Y 是 $(n-1)$-连通空间，$n\geqslant 1$，当 $n=1$ 时，且设 Y 是 1-单式的．则

(i) 对每个 $a^n\in H^n(K,\pi_n(Y))$，存在映射 $f:K\to Y$，使得 $\kappa^n(f)=a^n$;

(ii) $f\simeq f':K\to Y$，当且仅当 $\kappa^n(f)=\kappa^n(f')$。

证明 略(自己证或见[4]191页)。▌

附记 定理表明,利用映射的特征类概念,我们在 $\pi(K,Y)$ 与 $H^n(K,\pi^n(Y))$ 之间建立了一一对应。即用同调这个不变量刻划了映射的同伦关系。

由于 S^n 是 $(n-1)$-连通空间，$\pi_n(S^n)\approx J$，$n\geqslant 1$。于是得到 Hopf 分类定理。

定理5.11(H. Hopf) 设 K 为有限(单纯)复形，$\dim K\leqslant n$。则 $\pi(K,S^n)$ 与 $H^n(K,\pi_n(S^n))\approx H^n(K)$ 之间有一一对应

$$\kappa:\pi(K,S^n)\longleftrightarrow H^n(K),$$

使得对于 $[f]\in\pi(K,S^n)$，有 $\kappa[f]=\kappa^n(f)$。

证明 略(自己证)。▌

练 习 Ⅲ

在以下诸题中，设 (K,L) 为有限复形偶，Y 是 m-单式空间，$m=1,2,3,\cdots$，$\bar{K}=L\cup K^n$。

1．设 f，f'，f'': $\bar{K}^n\to Y$ 是映射。h_t 与 h'_t: $\bar{K}^{n-1}\to Y(t\in I)$ 分别是连接 $f|\bar{K}^{n-1}$ 至 $f'|\bar{K}^{n-1}$，$f'|\bar{K}^{n-1}$ 至 $f''|$

$\bar{K}^{n-1}$ 的同伦。记 $f_t: \bar{K}^{n-1} \to Y$, $t \in I$, 是映射,使得

$$f_t(x) = \begin{cases} h_{2t}(x), & x \in \bar{K}^{n-1}, t \leqslant \frac{1}{2}, \\ h'_{2t-1}(x), & x \in \bar{K}^{n-1}, t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

知 f_t 是连接 $f|\bar{K}^{n-1}$ 至 $f''|\bar{K}^{n-1}$ 的同伦。证明

$$d^n(f, f''; f_t) = d^n(f, f'; h_t) + d^n(f', f''; h'_t).$$

2. 设对任意 $n \geqslant 1$, $H^{n+1}(K, L; \pi^n(Y)) = 0$。证明：任意映射 $g: L \to Y$，均可扩充至 K 上。

3. 设 (Y, B) 是 m-单式空间偶（见定义 I.5.4），$m=1, 2, 3, \cdots$。映射 $f: (K, L) \to (Y, B)$ 称为 n-正规的，如果 $f(\bar{K}^{n-1}) \subseteq B$。对任意 n-正规映射 $f: (K, L) \to (Y, B)$，仿照 §1，请适当定义 $c^n(f) \in C^n(K, L; \pi^n(Y))$。并证明：

(i) $c^n(f) \in Z^n(K, L; \pi^n(Y))$;

(ii) $c^n(f) = 0$，当且仅当存在同伦 $f_t: K \to Y$, $t \in I$，使得 $f_0 = f$, $f_1(\bar{K}^n) \subseteq B$, $f_t|\bar{K}^{n-1} = f|\bar{K}^{n-1}$, $t \in I$;

(iii) $c^n(f) \in B^n(K, L; \pi^n(Y))$，当且仅当存在同伦 $f_t: K \to Y, t \in I$,使得 $f_0 = f, f_1(\bar{K}^n) \subseteq B, f_t|\bar{K}^{n-2} = f|\bar{K}^{n-2}$, $t \in I$。

4. 再设 Y 是 $(n-1)$-连通空间, $n \geqslant 1$, f 与 $f': K \to Y$ 是映射 $g: L \to Y$ 的扩充映射. 证明: $j^* \kappa^n(f, f') = \kappa^n(f) - \kappa^n(f')$，其中 j^* 是上调叙列中截去同态:

$$H^n(K, L; \pi_n(Y)) \to H^n(K, \pi_n(Y)).$$

5. 再设 Y 是 $(n-1)$-连通的有限复形，$\kappa^n(1) \in H^n(Y, \pi^n(Y))$是恒同映射 $1: Y \to Y$ 的特征类。又设 $g: L \to Y$ 是单纯映射。证明：$\kappa^n(g) = g^* \kappa^n(1)$，其中 $g^*: H^n(Y, \pi^n(Y)) \to H^n(L, \pi^n(Y))$是由 g 诱导的同态。

6. 证明定理5.10。

7. 证明定理5.11。

8. 再设L是K的连通的m-单式子复形，$m=1,2,3,\cdots$，及$H^{n+1}(K,L;\pi^n(L))=0$，$n=1,2,3,\cdots$。证明L是K的收缩核。

9. 再设K与L是单连通的。证明：L是K的形变收缩核，当且仅当

$$H_n(K,L)=0,\qquad n\geqslant 2.$$

10. 设K是n维连通的有限复形，且是m-单式的，$m=1,2,3,\cdots,n\geqslant 1$。证明：当$H^m(K,\pi_m(K))=0$，$m=1,2,\cdots,n$时，$K$可缩成一点。

11. 设K是n维连通的有限复形，$n\geqslant 1$。证明：K与S^1具有相同伦型，当且仅当

(i) $\pi_1(K)\approx J$；

(ii) K是m-单式的，$m=1,2,3,\cdots$；

(iii) $H^m(K,\pi_m(K))=0$，$m=2,3,\cdots,n$。

第四章 纤 维 空 间

〔内容提要〕

纤维空间（包括纤维丛）与复叠空间的理论是与同伦论密切关联的，尤其是计算各种空间同伦群的强有力工具。现今，它不仅与代数拓扑有关，而且成为一个活跃的分支，渗透到微分几何、李群、微分动力体系等学科中。

本章从目下流形的 J.-P. Serre 意义的纤维空间——对多面体具有复叠同伦性质这个概念出发，讨论各种纤维空间的最基本性质，以供进一步学习之用。

§1—§2 叙述了纤维空间与丛空间（也称纤维丛）的定义及简单例子。§3 介绍纤维空间有关的同伦正合叙列，这是同伦论中极有用处的结果之一，在某种意义上相当于截去性质在同调论中的地位（见[4]，Ⅳ及[7]Ⅳ）。

纤维映射的重要例子是球的纤维化，这是1931年—1935年由 H.Hopf 发现的（见[17]，[19]）。他解决的从 S^3 到 S^2 的映射同伦分类是同伦论发展史上的重要标志，如何构造这些纤维映射，见本章§4。

复叠映射是一类具有离散纤维的丛映射，它是Ⅱ.§4中的指数映射 p 的推广。§5 中除包含复叠映射的定义与基本性质外，还将讨论复叠空间上升腾问题的一些结果。

§6 回答了在适当条件下一空间上的复叠空间的存在性与唯一性等问题。特别地，叙述了所谓万有复叠空间的概念和性质。

§7 与§8 通过映射空间的性质，着重介绍路径空间、迴路空间这一类特殊的纤维空间。根据迴路乘法的性质，我们引伸出 H-空间的概念。凡此种种，在同伦论的近代发展中是经常用

到。近期的一些拓扑学家常由迴路空间出发建立同伦理论（例如见〔7〕等）。

§1　纤维空间

映射的升腾问题，是代数拓扑中又一个重要问题，它与映射扩充问题相对偶。问题是这样：设 E，B 与 X 是拓扑空间；$p:E\to B$，$g:X\to B$ 均为映射。如果存在映射 $f:X\to E$，使得 $pf=g$，则 f 称为 g 在 E 上的**升腾**。即图表

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ & {\nwarrow}^{f} \quad {\nearrow}_{g} & \\ & X & \end{array}$$

是交换的。此时，称 g 能升腾到 E 上。

如Ⅲ.§1知，当空间偶 (X,A) 对 Y 具有同伦扩充性质（有时简记为 HEP），对映射 $g:A\to Y$ 的扩充问题仅依赖于 g 的同伦类；而在同伦论中，通常考虑问题的方法正是映射的同伦类，而不是单个映射本身。因此，这一性质是重要的。

相对偶地，在升腾问题中有复叠同伦性质。

定义1.1　设 $p:E\to B$ 是一映射。称映射 p 对于拓扑空间 X 具有**复叠同伦性质**（简记为 CHP），如果对任意映射 $f:X\to E$ 及同伦 $g_t:X\to B$，$t\in I$，使得 $g_0=pf$，都存在同伦 $f_t:X\to E$，使得 $g_t=pf_t$，$t\in I$，$f_0=f$。即图表

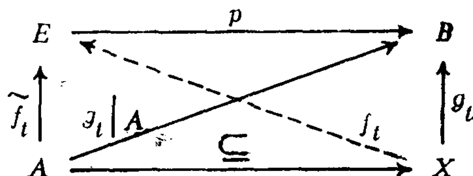
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ f\uparrow & \overset{F}{\nwarrow} & \uparrow G \\ X & \xrightarrow[i]{} & X\times I \end{array}$$

是交换的，其中 $G(x,t)=g_t(x)$，$F(x,t)=f_t(x)$，$i(x)=(x,0)$，$x\in X$，$t\in I$。此时，亦称映射 f 的同伦 f_t 复叠映射 $g=pf$ 的同伦 g_t。

命题1.1 设映射 $p:E\to B$ 对空间 X 具有 CHP，则映射 $g:X\to B$ 能否升腾到 E 上仅依赖于 g 的同伦类 $[g]$。

证明 略（复习题）。】

定义1.2 设 $p:E\to B$ 是映射，称映射 p 对于拓扑空间偶 (X, A) 具有**复叠同伦扩充性质**，简记为 $CHEP$，如果对任意映射 $f:X\to E$ 及映射 $g=pf:X\to B$ 的任一个同伦 $g_t:X\to B$, $t\in I$ 来说，任一个复叠 $g_t|A$ 的映射 $\tilde{f}|A=f$ 的同伦 $\tilde{f}_t:A\to E$, $t\in I$，都能扩充为复叠 g_t 的映射 f 的同伦 $f_t:X\to E$。见图表



的交换性，其中 $f_0=f$, $\tilde{f}_0=\tilde{f}$。

或者，换一种常用的表示：设 $f:X\to E$, $G:X\times I\to B$ 为映射，使得 $G(x, 0)=pf(x)$, $x\in X$。而如果部份同伦映射 $\tilde{F}:A\times I\to E$，使得 $G(x,t)=p\tilde{F}(x, t)$, $(x, t)\in A\times I$ 及 $\tilde{F}(x,0)=f(x)$, $x\in A$。则 $\tilde{F}$ 可扩充成映射 $F:X\times I\to E$，使得 $pF=G$，及 $F(x,0)=f(x)$, $x\in X$。

显然，当 $A=\varnothing$，则 $CHEP=CHP$。

现在我们来叙述纤维映射的定义。

定义1.3 设 $p:E\to B$ 是映射。如果 p 对任意有限（单纯）复形 K 所在的空间 $|K|$，具有 CHP，则称 p 是一个**纤维映射**。此时，拓扑空间 E 称为以 B 为底空间，P 为投射的**纤维空间**。

对于任意 $b\in B$, $p^{-1}(b)\subseteq E$ 称为 b 上的纤维。

附记1 此定义是 J.-P. Serre 意义下的纤维空间（见[24]），与其他如1955年 W. Hurewicz 提出的纤维空间含义

有所不同。后者要求映射 p 对任意拓扑空间 X，具有 CHP（见[24]）。请读者使用时注意。

附记2 与Ⅲ情形一样，以下有限（单纯）复形 K（或 L 等）亦代表空间 $|K|$（或 $|L|$ 等）。

附记3 定义中未假定映射 $p:E\to B$ 的在上性。容易验证，当 B 是路径连通空间，$E\neq\varnothing$，则纤维映射 p 总是在上映射。

事实上，设 $b\in B$，取 K 为一点 $e\in E$。又设 $f:e\to E$，使得 $f(e)=e$。因 B 是路径连通的，有同伦 $g_t:e\to B$, $t\in I$，使得 $g_0(e)=p(e)$，$g_1(e)=b$。根据 p 是纤维映射的定义，存在 f 的同伦 $f_t:e\to E$，使得 $g_t=pf_t$，$t\in I$，记 $e'=f_1(e)\in E$，则 $p(e')=b$。

例1.1 同胚映射 $p:E\approx B$，显然是纤维映射。

例1.2 Ⅱ.§4 的指数映射 $p:E^1\to S^1$ 是纤维映射。证明见练习Ⅱ.2。

例1.3 设 B 与 F 为拓扑空间；$p_1:B\times F\to B$ 为自然投射，即对 $(b,y)\in B\times F$，$p_1(b,y)=b$。则 p_1 是纤维映射。

事实上，设 $f:K\to B\times F$ 是映射，K 为有限（单纯）复形，$g_t:K\to B$，$t\in I$ 是 p_1f 的同伦。又命 $f_t:K\to B\times F$ 为映射，使得对于 $x\in K$，有

$$f_t(x)=(g_t(x),\ p_2f(x)),\ t\in I,$$

其中 $p_2:B\times F\to F$ 为自然投射，即对 $(b,\ y)\in B\times F$，$p_2(b,\ y)=y$。可见 f_t 是 f 的同伦；且 $p_1f_t=g_t, t\in I$。故 p_1 是纤维映射。此时，对 $b\in B$, b 上的纤维 $p_1^{-1}(b)$ 总同胚于空间 F。

例1.4 设 $p:E\to B$ 为映射，且有（在上）同胚映射 $\varphi:B\times F\to E$，使得 $p\varphi=p_1$，其中 p_1 见例1.3，则 p 是纤维映射。

事实上，设 $f:K\to E$ 为映射，$g_t:K\to B$，$t\in I$是 $g=pf$ 的一个同伦。因 p_1 是纤维映射，φ 是同胚，对于 $f'=\varphi^{-1}f$，g_t 是 $g=p_1f'$ 的一个同伦，$t\in I$，则有 f'的同伦 $f'_t:K\to B\times F$，使得 $p_1f'_t=g_t$，$t\in I$。于是命 $f_t=\varphi f'_t:K\to E$，$t\in I$，则 f_t 是 f 的同伦，且有 $pf_t=g_t$，$t\in I$。

其余的例子见§2，§4与§5等。

关于判断一个映射是否是纤维映射，我们有如下定理。

定理1.2 设 $p:E\to B$是映射，则下述条件是等价的：

(i) $p:E\to B$是纤维映射；

(ii) $p:E\to B$对每一个单形 $\sigma^m(m\geqslant 0)$具有 CHP；

(iii) 对任一个单形 σ^m，$m\geqslant 0$，p 对空间偶 $(\sigma^m, \partial\sigma^m)$ 具有 $CHEP$；

(iv) P 对任一个有限(单纯)复形偶(K, L)具有 $CHEP$；

(v) 设(K, L)为有限(单纯)复形偶，且L是K的强形变收缩核①．设 $f':L\to E$是映射，$g:K\to B$是 $g'=pf'$的扩充映射。则f' 有扩充映射 $f:K\to E$，使 $pf=g$。

证明 (i) ⇒ (ii) 显然。

(ii) ⇒ (iii) 设 $m=0$，根据定义1.2即得到。现设 $m\geqslant 1$。任给映射$f:\sigma^m\to E$及映射 $g=pf:\sigma^m\to B$的同伦 $g_t:\sigma^m\to B$，$t\in I$。且设映射$\tilde{f}=f|\partial\sigma^m$ 的同伦$\tilde{f}_t:\partial\sigma^m\to E$，$t\in I$，使得 $p\tilde{f}_t=g_t|\partial\sigma^m$，$t\in I$。记

$$\triangle(\sigma^m, \partial\sigma^m)=\sigma^m\times(0)\cup(\partial\sigma^m)\times I\subseteq\sigma^m\times I.$$

我们又取（在上）同胚映射 $\varphi:\sigma^m\times I\to\sigma^m\times I$，使得

$$\varphi(\sigma^m\times(0))=\triangle(\sigma^m, \partial\sigma^m).$$

φ 的存在性见与之等价的本节末引理1.3。令 $F':\triangle(\sigma^m,\partial\sigma^m)\to$

① 参阅[1]75页。

E 为映射，使得

$$F'(x,t)=\begin{cases} f(x), & (x,t)\in\partial\sigma^m\times(0); \\ \tilde{f}_t(x), & (x,t)\in(\partial\sigma^m)\times I; \end{cases}$$

及 $G':\sigma^m\times I\to B$ 为映射，使得 $G'(x,t)=g_t(x)$，$(x,t)\in\sigma^m\times I$。于是，有

$$F=F'\varphi|\sigma^m\times(0):\sigma^m\times(0)\to E,$$
$$G=G'\varphi:\sigma^m\times I\to B,$$

且适合　$pF=G|\sigma^m\times(0)$。

根据条件 (ii)，同伦 F 有扩充 $\tilde{F}:\sigma^m\times I\to E$，使得 $p\tilde{F}=G$。现在命 $f_t:\sigma^m\to E$，$t\in I$，使得 $f_t(x)=\tilde{F}\varphi^{-1}(x,t)$，$x\in\sigma^m$，$t\in I$。可知 f_t 是复叠 g_t 的映射 f 的同伦，故 p 对 $(\sigma^m, \partial\sigma^m)$ 具有 $CHEP$。

(iii) $\Rightarrow$ (iv)　设(iii)成立，对 $(K-L)$ 中所含单形个数 r 用归纳法证明 (iv)。当 $r=0$，(iv) 显然成立。现设 $r\geqslant 1$。任给映射 $f:K\to E$ 及映射 $g=pf:K\to B$ 的同伦 $g_t:K\to B$，$t\in I$；且设映射 $\tilde{f}=f|L$ 的同伦 $\tilde{f}_t$: $L\to E$，$t\in I$，使得 $p\tilde{f}_t=g_t|L$，$t\in I$。命 σ 是 $(K-L)$ 中一个具有最大维数的单形。记 $K_\sigma=K-\sigma$，知 K_σ 是 K 中包含 L 的子复形。及记

$$\triangle(K,L)=K\times(0)\cup L_*\subseteq K_*,$$
$$\triangle(K_\sigma,L)=K_\sigma\times(0)\cup L_*\subseteq K_\sigma\times I,$$

其中　$L_*=L\times I$，$K_*=K\times I$　如Ⅲ。令 $F':\triangle(K, L)\to E$，$G:K_*\to B$ 为映射，使得

$$F'(x,t)=\begin{cases} f(x), & (x,t)\in K\times(0), \\ \tilde{f}_t(x), & (x,t)\in L_*, \end{cases}$$

$$G(x,t)=g_t(x),\quad (x,t)\in K_*,$$

及 $F'_\sigma=F'|\triangle(K_\sigma, L)$。

根据归纳法假设，F'_σ 可扩充至映射 F_σ: $K_\sigma\times I\to E$，使得

$$pF_\sigma = G\,|K_\sigma \times I.$$

记 $F_1':\triangle(\sigma,\ \partial\sigma)\to E$，使得 $F_1'\,|\,\sigma\times(0)=F'\,|\,\sigma\times(0)$，$F_1'\,|(\partial\sigma)\times I=F\,|(\partial\sigma)\times I$。知 F_1'为映射，且根据条件(iii)，F_1'可扩充至映射$F_1:\sigma\times I\to E$，使得 $pF_1=G\,|\sigma\times I$。

于是命 $F:K_*\to E$ 为映射，使得 $F\,|K_\sigma\times I=F_\sigma$，$F\,|\,\sigma\times I=F_1$。则 F 是 F' 的扩充映射，且 $pF=G$。归纳法步骤完成。

故 p 对 (K,L) 具有 $CHEP$。

(iv) ⇒ (v)　设 L 是 K 的强形变收缩核，即有同伦 $d_t:K\to K$，$t\in I$，使得 $d_0=1$（恒同）$:K\to K$，及 $d_1:K\to L$ 为收缩映射，$d_t\,|L=1$(恒同)$:L\to L$。

命 $\tilde{f}=f'd_1:K\to E$，$g_t=gd_{1-t}:K\to B$，$t\in I$。知 $g_0=gd_1=pf'd_1=p\tilde{f}$，及 $\tilde{f}_t=f':L\to E$，$t\in I$ 是复叠 $g_t\,|L=g|L$的(平凡)同伦。根据条件(iv)，$f'=\tilde{f}_t$有映射$\tilde{f}$的扩充同伦 $f_t:K\to E$，使得 $pf_t=g_t$，$t\in I$。

命 $f=f_1:K\to E$，知 f 是 f' 的扩充，且$pf=g$。

(v)⇒(i)　对于任一个有限(单纯)复形K，因为 $K\times(0)$ 是K_*的强形变收缩核，由条件(v)即得到p对K具有 CHP。即p是纤维映射。】

最后，还需证明下面的引理。

引理1.3　对于$n\geqslant 1$，存在(在上)同胚映射$\Psi:\nabla^n\times I\to\nabla^n\times I$，使得 $\Psi(\nabla^n\times(0)\cup S^{n-1}\times I)=\nabla^n\times(1)$，其中$\nabla^n$与$S^n=\partial\nabla^n$见Ⅰ.§3。

证明　如图1.1将 $\nabla^n\times I$分成两部份，即

$$A=\left\{(x,t)\in\nabla^n\times I\,\middle|\,\|x\|\geqslant 1-\frac{2}{3}t\right\},$$

$$B=\left\{(x,t)\in\nabla^n\times I\,\middle|\,\|x\|\leqslant 1-\frac{2}{3}t\right\}.$$

命 $\Psi:\nabla^n\times I\to\nabla^n\times I$，使得

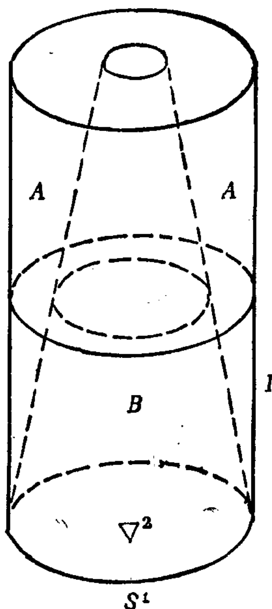


图 1.1

$$\Psi(x,\ t)=\begin{cases}\left(\dfrac{2t+1}{3\|x\|}x,\ \dfrac{3}{2}\|x\|-\dfrac{1}{2}\right), & (x,t)\in A,\\ \left(\dfrac{1+2t}{3-2t}x,\ 1-t\right), & (x,\ t)\in B.\end{cases}$$

容易验证：

(i) Ψ 的定义是一意的，且是连续映射；

(ii) $\Psi(A)\subseteq A$, $\Psi(B)\subseteq B$;

(iii) $\Psi(\nabla^n\times(0))=\left\{(x,\ 1)\ \middle|\ \|x\|\leqslant\dfrac{1}{3}\right\}$,

$$\Psi(S^{n-1}\times I)=\left\{(x,\ 1)\ \middle|\ \frac{1}{3}\leqslant\|x\|\leqslant 1\right\},$$

因之 $\Psi(\nabla^n\times(0)\cup S^{n-1}\times I)==\nabla^n\times(1)$;

(iv) $\Psi\cdot\Psi=1$ (恒同): $\nabla^n\times I\to\nabla^n\times I$, 因之 Ψ 是同

胚映射。】

§2 从空间

本节从局部复叠同伦性质开始，给出纤维映射的局部特征（定理2.1）。再从此基础上，由例1.3的笛卡儿乘积空间作模型，引出局部笛卡儿积式的空间——从空间的概念及若干例子。

定义2.1 设 $p:E\to B$ 为一个映射，σ^m 为m维单形$(m\geqslant 0)$。映射p称为在点$b\in B$处对σ^m**具有局部复叠同伦性质**（简记为$LCHP$），如果b在B中有一个领邻域U_b，使得 $p:p^{-1}(U_b)\to U_b$对σ^m具有CHP。

定理2.1 映射 $p:E\to B$ 是一个纤维映射，当且仅当对任意单形σ^m，$m\geqslant 0$，p在每一点$b\in B$处都具有$LCHP$。

证明 必要性 对每一点$b\in B$，取$U_b=B$即得到。

充分性 根据定理1.2，只须证明：对每一个单形$\sigma^m(m\geqslant 0)$，映射$f':\sigma^m\to E$及pf'的同伦$G:\sigma^m\times I\to B$，则有f'的同伦$F:\sigma^m\times I\to E$，使得$pF=G$。

根据假设，对任意 $b\in B$，有b在B中的邻域U_b，使得$p:p^{-1}(U_b)\to U_b$是一个纤维映射。记

$$\mathcal{U}=\{U_b\,|b\in B\},$$
$$\mathcal{V}=\{V_b=G^{-1}(U_b)|\,U_b\in\mathcal{U}\}.$$

知$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$分别是B与$\sigma^m\times I$的开复盖。因$\sigma^m\times I$是紧致可度量空间，根据[1]有Lebesgue数$r>0$，使得对于$\sigma^m\times I$的子集W，只要$D(W)<r$，其中D表示就$\sigma^m\times I$上度量而言W的直径，则W至少包含在某一个V_b内。

于是，可取σ^m的多次重心重分K及I的分割$0=t_0<t_1<\cdots<t_l=1$，使得对任意单形$\tau^k\in K$，及对任一个i: $0\leqslant i\leqslant l-1$，有$D(\tau^k\times[t_i,t_{i+1}])<r$。因而有$U_b\in\mathcal{U}$，$G(\tau^k\times[t_i,\,t_{i+1}])\subseteq U_b$，

现在对 i：$0 \leqslant i \leqslant l$，用归纳法定义映射 $F_i: \sigma^m \times [t_0, t_i] \to E$，使得 $F_i | \sigma^m \times (0) = f'$，且 $pF_i = G | \sigma^m \times [t_0, t_i]$。当 $i=0$，因 $[t_0, t_i]=0$，取 $F_i = f'$ 即得。设对某一个 i：$0 \leqslant i \leqslant l-1$，适合上述条件的 F_i 已定义。我们将在下面定义映射 $\chi_i: \sigma^m \times [t_i, t_{i+1}] \to E$，使得 $\chi_i | \sigma^m \times (t_i) = F_i | \sigma^m \times (t_i)$，且 $p\chi_i = G | \sigma^m \times [t_i, t_{i+1}]$。显然，如果这样的映射 χ_i 存在，只须命 $F_{i+1}: \sigma^m \times [t_0, t_{i+1}] \to E$，使得

$$F_{i+1} | \sigma^m \times [t_0, t_i] = F_i, \quad F_{i+1} | \sigma^m \times [t_i, t_{i+1}] = \chi_i.$$

归纳步骤完成。于是取 $F = F_l: \sigma^m \times I \to E$，这就证明了本定理。

最后，我们来定义 χ_i：

记 $\sigma^m \times [t_i, t_{i+1}] = K \times [t_i, t_{i+1}]$ 的子集 $\bar{K}_i^k = K \times (t_i) \cup K^k \times [t_i, t_{i+1}]$，$k = -1, 0, 1, \cdots, m$。其中 K^k 是 K 的 k 维骨架，$k=-1$ 时，$\bar{K}^k = K \times (t_i)$。

对 k 用归纳法定义映射 $\chi_{i,k}: \bar{K}_i^k \to E$，使得 $\chi_{i,k} = \chi_{i,k+1} | \bar{K}_i^k$，且 $p\chi_{i,k} = G | \bar{K}_i^k$。事实上，当 $k=-1$，可取 $\chi_{i,-1} = F_i | \sigma^m \times (t_i)$。设对某一个 k：$0 \leqslant k \leqslant m$，$\chi_{i,k-1}$ 已经有了定义。对任给 $\tau^k \in K$，存在 $U_b \in \mathcal{U}$，使得 $G(\tau^k \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_b$。根据 U_b 与 $\chi_{i,k-1}$ 的定义及定理 1.2(iii)，则 $\chi_{i,k-1} | \tau^k \times (t_i) \cup (\partial \tau^k) \times [t_i, t_{i+1}]$ 可扩充至映射 $\chi_{i,\tau^k}: \tau^k \times [t_i, t_{i+1}] \to E$，使得 $p\chi_{i,\tau^k} = G | \tau^k \times [t_i, t_{i+1}]$。于是，可取 $\chi_{i,k-1}$ 的扩充映射 $\chi_{i,k}: \bar{K}_i^k \to E$，使得对每一个 k 维单形 $\tau^k \in K$，$\chi_{i,k} | \tau^k \times [t_i, t_{i+1}] = \chi_{i,\tau^k}$。对 k 的归纳步骤完成。

显然，为了定义适合条件的映射 χ_i，只须取 $\chi_i = \chi_{i,m}$。】

附记　定理表明，映射 $p: E \to B$ 是纤维映射，即每一点 $b \in B$，皆有邻域 U_b，使得 $p: p^{-1}(U_b) \to U_b$ 是纤维映射。这是纤维映射的局部特征。

如例 1.3 指出，笛卡儿乘积空间的自然投射是纤维映射的简

单而重要的例子。现在考虑映射 $p:E\to B$，其中空间 E 从整体看虽不是乘积空间 $B\times F$ 的形式，但就**局部**而言它是**笛卡儿积式**的。这种情形就是一类重要的纤维空间——丛空间，也称纤维丛。其定义如下。

定义2.2 设 $p:E\to B$ 是映射，如果存在一个拓扑空间 F，使得对于每一个 $b\in B$，都有 b 在 B 中的邻域 U_b 和(在上)同胚映射 $\phi_{U_b}:U_b\times F\to p^{-1}(U_b)$，使得 $p\phi_{U_b}(x,y)=x$，$(x,y)\in U_b\times F$。则 p 称为**丛映射**，E 称为以 B 为**底空间**，F 为**导空间**，p 为投射的**丛空间**。此时亦称 p 对 F 而言是**局部笛卡儿积式的**。

定理2.2 设 $p:E\to B$ 是从映射，则 p 是纤维映射。

证明 对任意 $b\in B$，有 U_b，注意图表

$$\begin{array}{ccc} U_b\times F & \xrightarrow{\quad p_1\quad} & U_b \\ & \searrow^{\phi_{U_b}} \qquad \nearrow_{p} & \\ & p^{-1}(U_b) & \end{array}$$

的交换性。根据例1.3与1.4，$p:p^{-1}(U_b)\to U_b$ 是纤维映射，故根据定理2.1，$p:E\to B$ 也是纤维映射。▌

附记 显然，对每一个 $b\in B$，纤维 $p^{-1}(b)$ 与 F 同胚。

例2.1 $p_1:B\times F\to B$ 如例1.3。显然 p_1 是从映射，即

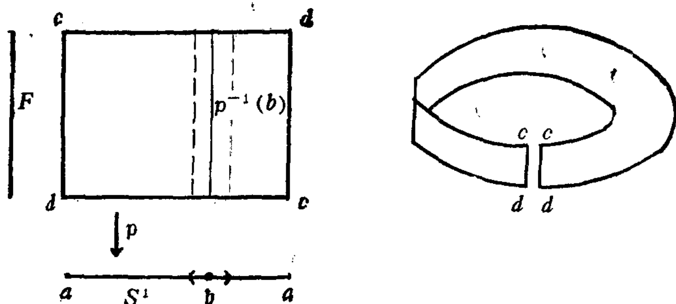


图 2.1

乘积空间 $B\times F$ 是 B 上的以 F 为导空间的纤维丛，其中 ϕ 是恒同同胚。

例2.2　M bius 带，如图2.1，定义见[1]109页。

它是以 S^1(二端点叠合的线段)为底空间，线段 F 为导空间的纤维丛.对于 $b\in S^1$ 有邻域 U_b，在 M bius 带上 $p^{-1}(U_b)$ 是一个"矩形"．即 M bius 带是由一块块"矩形"适当"粘合"而成。

例2.3　Klein 瓶，如图2.2．是反向叠合有限柱面的底园而成。它是以 S^1 为底空间，S^1 为导空间的纤维丛。对于 $b\in B$ 有邻域 U_b，在 Klein 瓶上，$p^{-1}(U_b)$ 是一"柱形".即 Klein 瓶是由一些块"柱形"适当"粘合"而成。

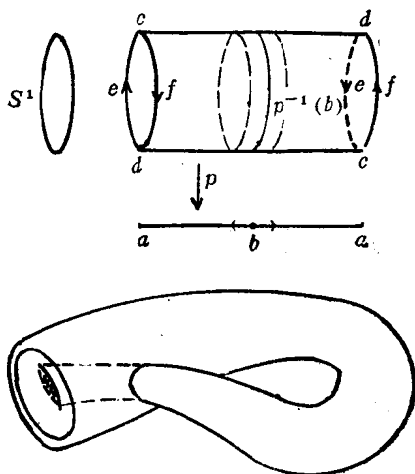


图　2.2

例2.4　n 维球 $S^n(n\geqslant 2)$ 是以 n 维射影空间 P^n 为底空间，$F=\{1,2\}$ 是仅包含两点的离散空间为导空间的纤维丛(见图2.3)。

事实上，P^n 是由 S^n 将对径点等同所得的商空间。记 $p:S^n\to P^n$ 为自然投射及 $\theta:S^n\to S^n$ 为对径映射。即对于 $b\in S^n$ 有 $\theta(b)=\tilde{b}\in S^n$，$\tilde{b}$ 为 b 的对径点。对任意 $b^*=p(b)=p(\tilde{b})\in P^n$，适当取 b 在 S^n 中的领域 U_b，使得 $\widetilde{U}_b\cap U_b=\varnothing$，其中 $\widetilde{U}_b=\theta(U_b)$。命 $U_{b^*}=p(U_b)$。因 $p^{-1}(U_{b^*})=U_b\cup\widetilde{U}_b$ 是 S^n 的开集，

知U_{b^*}是P^n的开集，即b^*在P^n中的邻域。

由于$U_b\cap\widetilde{U}_b=\varnothing$，有（在上）同胚映射 $\phi_{U_{b^*}}:U_{b^*}\times F\to p^{-1}(U_{b^*})$，使得对于任意 $c^*=p(c)=p(\tilde{c})\in U_b{}^*$，有

$$\phi_{U_{b^*}}(c^*,1)=c\in U_b,\qquad \phi_{U_{b^*}}(c^*,2)=\tilde{c}\in\widetilde{U}_b,$$

且 $p\phi_{U_{b^*}}(c^*,1)=c^*=p\phi_{U_{b^*}}(c^*,2)$。

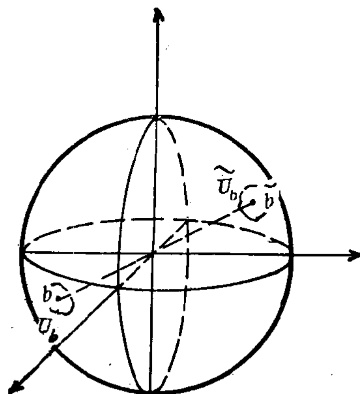


图 2.3

§3 纤维空间的同伦群

本节回到一般的纤维空间，将证明纤维映射在同伦论中的一个基本定理。即底空间对某一个基点的同伦群与纤维空间对于基点上的纤维的相对同伦群同构。

先介绍一个记号。

设X是路径连通空间，X_0是X的子集（不一定是路径连通的），$x_0\in X_0$。对于$q\geqslant 2$，在定义Ⅰ.5.1中，我们已给出相对同伦群$\pi_q(X,A,x_0)$的定义。显然$\pi_q(X,X_0,x_0)=\pi_q(X,X_0',x_0)$，其中$X_0'$是$X_0$中$x_0$所在路径连通分支。

此外，记$\pi_1(X,X_0,x_0)$是一切映射:$(I,(0),(1))\to(X,x_0,X_0)$就同伦关系$f\simeq f':(I,(0),(1))\to(X,x_0,X_0)$所分成的同伦

类集合。

定理3.1 设E与B是路径连通空间，$p:E\to B$是纤维映射。$b_0\in B_0\subseteq B$，记$E_0=p^{-1}(B_0)$，取$e_0\in p^{-1}(b_0)\subseteq E_0$。则$p$导出同构$p_*:\pi_q(E, E_0, e_0)\approx\pi_q(B, B_0, b_0)$，$q\geqslant 2$，及一一对应$p_*:\pi_1(E,E_0,e_0)\to\pi_1(B,B_0,b_0)$。

证明 由定义Ⅰ.6.2等，易见映射p导出同态

$$p_*:\pi_q(E,E_0,e_0)\to\pi_q(B,B_0,b_0),\quad q\geqslant 2,$$

及单值对应 $p_*:\pi_1(E, E_0, e_0)\to\pi_1(B,B_0,b_0)$。

（i）p_* 的在上性：设$g:(\nabla^q,S^{q-1},p_0)\to(B,B_0,b_0)$是$\gamma\in\pi_b(B,B_0,b_0)$的代表映射，$q\geqslant 1$。因$p_0$是$\nabla^q$的强形变收缩核，根据定理1.2的条件（v），存在映射$f:(\nabla^q,p_0)\to(E,e_0)$，使得$pf=g$，从而知$f(S^{q-1})\subseteq E_0$。即映射$f:(\nabla^q, S^{q-1},p_0)\to(E,E_0,e_0)$代表$\pi^q(E,E_0,e_0)$中某元素$\alpha$，且$p_*(\alpha)=\gamma$。

（ii）p_* 的一一对应性：设α与$\beta\in\pi_q(E, E_0, e_0)$，使得$p_*(\alpha)=p_*(\beta)$，$q\geqslant 1$。分别选取$\alpha$与$\beta$的代表映射$f$与$f':(\nabla^q, S^{q-1},p_0)\to(E,E_0,e_0)$，则存在同伦映射$G:(\nabla^q, S^{q-1}, p_0)\times I\to(B,B_0,b_0)$，使得$G(u,0)=pf(u)$，$G(u,1)=pf'(u)$，$u\in\nabla^q$。

记 $T=\nabla^q\times(0)\cup\nabla^q\times(1)\cup(p_0)\times I$，易知$T$是$\nabla^q\times I$的强形变收缩核．命$F':T\to E$为映射，使得

$$F'(u,t)=\begin{cases}f(u), & (u,t)\in\nabla^q\times(0),\\ f'(u), & (u,t)\in\nabla^q\times(1),\\ e_0, & (u,t)\in(p_0)\times I.\end{cases}$$

知 $pF'=G|T$。

根据定理1.2的条件（v），F'有扩充映射$F:\nabla^q\times I\to E$，使得$pF=G$，从而知$F(S^{n-1}\times I)\subseteq E_0$。即映射$F:(\nabla^q\times I, S^{n-1}\times I,p_0\times I)\to(E,E_0,e_0)$是连接$f$至$f'$的同伦。故$\alpha=\beta$。▌

由此得到下面的重要的推论。

推论3.2 设$p:E\to B$是纤维映射；E与B是路径连通空间，$b_0\in B$，$e_0\in p^{-1}(b_0)$。则 $p_*:\pi_q(E,p^{-1}(b_0),e_0)\approx\pi_q(B, b_0)$，

$q\geqslant 2$，及 p_* 是 $\pi_1(E,p^{-1}(b_0),e_0)$ 到 $\pi_1(B,b_0)$ 的一一对应。

证明 只须在定理3.1中取 $B_0=\{b_0\}$，由于

$$\pi_q(B,\{b_0\},b_0)=\pi_q(B,b_0)$$

即得推论。】

现在考虑纤维映射的同伦叙列。

设 $p:E\to B$ 为纤维映射，$b_0\in B$，$e_0\in p^{-1}(b_0)$ 等如前所述。对空间偶 $(E,p^{-1}(b_0))$ 有同伦叙列

$$\cdots\longrightarrow\pi_{q+1}(E,p^{-1}(b_0),e_0)\xrightarrow{d_*}\pi_q(p^{-1}(b_0),e_0)$$
$$\xrightarrow{i_*}\pi_q(E,e_0)\xrightarrow{j_*}\pi_q(E,p^{-1}(b_0),e_0)\longrightarrow\cdots$$
$$\longrightarrow\pi_2(E,p^{-1}(b_0),e_0)\xrightarrow{d_*}\pi_1(p^{-1}(b_0),e_0)$$
$$\xrightarrow{i_*}\pi_1(E,e_0)\xrightarrow{j_*}\pi_1(E,p^{-1}(b_0),e_0).$$

注意，因$p^{-1}(b_0)$不一定是路径连通空间，其中 $\pi_q(p^{-1}(b_0),e_0)$ 表示空间 $p^{-1}(b_0)$ 中 e_0 所在的路径连通分支的 q 维同伦群，$q\geqslant 1$。由定理Ⅰ.7.1，上述同伦叙列是正合的。

定义3.1 设 $p:E\to B$ 是纤维映射，E 与 B 是路径连通空间，$b_0\in B$，$e_0\in p^{-1}(b_0)$。则

$$\cdots\longrightarrow\pi_{q+1}(B,b_0)\xrightarrow{\bar{d}_*}\pi_q(p^{-1}(b_0),e_0)\xrightarrow{i_*}\pi_q(E,e_0)$$
$$\xrightarrow{p_*}\pi_q(B,b_0)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\pi_2(B,b_0)$$
$$\xrightarrow{\bar{d}_*}\pi_1(p^{-1}(b_0),e_0)\xrightarrow{i_*}\pi_1(E,e_0)\xrightarrow{p_*}\pi_1(B,b_0).$$

称为**纤维映射 p 的同伦叙列**，其中

$$\bar{d}_*=d_*p_*^{-1}:\pi_q(B,b_0)\to\pi_{q-1}(p^{-1}(b_0),e_0),\quad q\geqslant 2,$$

及$p_*:\pi_q(E,e_0)\to\pi_q(B,b_0)$，$q\geqslant 1$ 是由映射 p 导出的同态。

命题3.3 上述纤维映射 p 的同伦叙列是正合的。】

例3.1 当 $n\geqslant 2$，有

$$\pi_q(P^n)\approx\pi_q(S^n),\qquad q\geqslant 2,$$
$$\pi_1(P^n)\approx J_2,$$

其中 P^n 是 n 维射影空间。

证明　由例2.4，自然投射 $p:S^n\to P^n$ 是纤维映射。对于 $b_0^*\in P^n$，$p^{-1}(b_0^*)=\{b_0,\tilde{b}_0\}$ 仅由两点组成。因之 $\pi_q(p^{-1}(b_0^*),b_0)=0, q\geqslant 1$。根据命题3.3，$\pi_q(S^n)\approx\pi_q(P^n)$，$q\geqslant 2$。再利用推论3.2，$p_*:\pi_1(S^n,p^{-1}(b_0^*),b_0)\to\pi_1(P^n,b_0^*)$是一一对应，而$\pi_1(S^n,p^{-1}(b_0^*),b_0)$ 仅含两个元素，故知 $\pi_1(P^n)\approx J_2$。

例3.2　$\pi_q(S^1)=0$，$q\geqslant 2$。

证明　设 $p:E^1\to S^1$ 为指数映射，它是纤维映射（见例1.2）。对于 $b_0=(1,0)\in S^1$，有 $p^{-1}(b_0)=J$。取 $e_0\in J$，知 $\pi_q(p^{-1}(b_0),e_0)=0,q\geqslant 1$。故 $p_*:\pi_q(E^1,e_0)\approx\pi_q(S^1,b_0)$，$q\geqslant 2$。即 $\pi_q(S^1)=0$。

§4　球的纤维化

作为例子，本节介绍在同伦论历史上很引起注意的 Hopf **纤维映射**

$$p:S^{2n-1}\to S^n,\qquad n=2,\ 4,\ 8.$$

它是1931年—1935年由 H. Hopf 发现的，见[17] 与 [19]。这些结果称为球的纤维化。分述如下：

1. **n=2的情形**　设C为复数域，知

$$S^3=\{(z_1z_2)\in C\times C\,|\,\bar{z}_1z_1+\bar{z}_2z_2=1\}.$$

利用球极投射，$S^2\approx E^2\cup(\infty)=C\cup(\infty)$。

在 $C^2-(0,0)=C\times C-(0,0)$ 中，将 $u=(z_1,z_2)$ 与 $\lambda u=(\lambda z_1,\lambda z_2)$ $(\lambda\in C-(0))$等同，所得的商空间称为复射影直线，记为M。令$\rho:C^2-(0,0)\to M$是自然投射，使得$\rho(z_1,z_2)=[z_1,z_2]\in M$。其中$M$即取 $C^2-(0,0)$ 的商拓扑。即 $U\subseteq M$ 是开集，当且仅当 $\rho^{-1}(U)$ 在 $C^2-(0,0)$ 中是开集，

$\rho|S^3:S^3\to M$ 是在上的。事实上，对任意 $[z_1,z_2]\in M$，有 $u=\dfrac{(z_1,z_2)}{(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^{\frac{1}{2}}}\in S^3$，$\rho(u)=[z_1,z_2]$；同时，如果 (z_1,z_2)，$(z_1',z_2')\in S^3$，使得 $\rho(z_1,z_2)=\rho(z_1',z_2')$，当且仅当有 $\lambda\in C-(0)$，而 $z_1'=\lambda z_1$，$z_2'=\lambda z_2$。因为 $\lambda\bar{\lambda}=\lambda\bar{\lambda}(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)=z_1'\bar{z}_1'+z_2'\bar{z}_2'=1$，知 $|\lambda|=1$。即有 θ：$-\pi<\theta\leqslant\pi$，$\lambda=e^{i\theta}$。故对 $[z_1,z_2]\in M$，$\rho^{-1}([z_1,z_2])$ 与 S^3 中的 S^1 同胚。

命 $\chi:M\to S^2$，使得对于 $[z_1,z_2]\in M$，有

$$\chi([z_1,z_2])=\begin{cases}\dfrac{z_1}{z_2}, & z_2\neq 0,\\ \infty, & z_2=0.\end{cases}$$

可以验证 χ 是(在上)同胚映射：

（i）χ 的在上性与一一对应性，根据定义是明显的；

（ii）由 $\chi\rho:C^2-(0,0)\to S^2$ 是连续的，根据商拓扑定义，χ 是连续的；

（iii）由 $M=\rho(S^3)$，M 是紧致的，根据(i)与(ii)，χ 是同胚映射。

现在定义：$p=\chi\rho|S^3:S^3\to S^2$。我们证明 S^3 是以 S^2 为底空间，S^1 为导空间，p 为投射的纤维丛。

事实上，记 $U=C\subseteq S^2$，$V=S^2-(0)$，则 U 与 V 是 S^2 的开集，$S^2=U\cup V$。因

$$p^{-1}(U)=\{(z_1,z_2)\in S^3\,|\,z_2\neq 0\},$$
$$p^{-1}(V)=\{(z_1,z_2)\in S^3\,|\,z_1\neq 0\}.$$

命 $\phi_U:U\times S^1\to p^{-1}(U)$，$\phi_V:V\times S^1\to p^{-1}(V)$ 分别为下式规定的映射

$$\phi_U(z,e^{i\theta})=\left(\frac{ze^{i\theta}}{\sqrt{1+z\bar{z}}},\ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+z\bar{z}}}\right),\ z\in U,\ e^{i\theta}\in S^1,$$

$$\phi_V(z, e^{i\theta})=\begin{cases}\left(\dfrac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{z\bar{z}}}},\ \dfrac{e^{i\theta}}{z\sqrt{1+\dfrac{1}{z\bar{z}}}}\right), & z\in V-(\infty),\\ (e^{i\theta},0), & z=\infty.\end{cases}$$

则 ϕ_U 与 ϕ_V 是(在上)同胚映射，且

$$p\phi_U(z,e^{i\theta})=z, \qquad z\in U,$$

$$p\phi_V(z,e^{i\theta})=z, \qquad z\in V.$$

故 p 是丛映射。

命题4.1 当 $q\geqslant 3$，$\pi_q(S^3)\approx\pi_q(S^2)$。

证明 由 Hopf 纤维映射 $p:S^3\to S^2$ 的同伦叙列的正合性（命题 3.3），及 $\pi_q(S^1)=0$，$q\geqslant 2$（例 3.2），即得此命题.】

附记 作为命题的当然结果，有 $\pi_3(S^2)\approx J$，$p:S^3\to S^2$ 代表 $\pi_3(S^2)$ 的生成元。历史上，因为对 n 维球 S^n，当$q\leqslant n$，$\pi_q(S^n)$ 是容易计算的（见定理 Ⅱ.4.1）；然而，当 $q>n$，$\pi_q(S^n)$ 是否与 $H_q(S^n)$ 类似也是平凡群呢？H.Hopf 1931年在[17]中，首先指出，存在映射 $p:S^3\to S^2$，它不是零伦映射。于是才使得研究一般高维同伦群的问题成为重要（但又实际上是困难）的问题。

2. **n=4的情形** 为了类似构造纤维映射 $p:S^7\to S^4$，需利用四元数系 Q。这里简单介绍它的定义。

记 $Q=E^4=\{u=(x_1, x_2, x_3, x_4)\,|\,x_i$实数，$i=1, 2, 3, 4\}$，对通常的向量加法与数乘向量组成（实）四维线性空间，以 $0=(0, 0, 0, 0)$ 为零元。我们在 Q 上定义乘法运算：$Q\times Q\to Q$。为此记 $e=(1, 0, 0, 0)$，$i=(0, 1, 0, 0)$，$j=(0, 0, 1, 0)$，$k=(0, 0, 0, 1)$，用下表规定它们的乘积

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

对于一般元素 $u=(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1e+x_2i+x_3j+x_4k$, $u'=(x_1', x_2', x_3', x_4')=x_1'e+x_2'i+x_3'j+x_4'k$, 根据分配律展开，并合并各项(实)系数所得结果来规定乘积 $u\cdot u'$。对 $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in Q$，称 $\bar{u}=(x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$ 为 u 在 Q 中的共轭元素，直接验证知：

(i) $u\cdot\bar{u}=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)e=\|u\|^2e$,

其中 $\|u\|=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{2}}$ 称为 u 在 Q 中的模数；

(ii) 如 $u\neq 0$，则存在唯一的逆元素 $u^{-1}=\dfrac{\bar{u}}{\|u\|^2}$；

(iii) 设 $u, u'\in Q$，则 $\|u\cdot u'\|=\|u\|\|u'\|$。进而，$Q$ 是一个非交换的可除结合代数，称为四元数系。

现在转入主题。

$S^7=\{(u_1,u_2)\in Q\times Q\,|\,u_1\bar{u}_1+u_2\bar{u}_2=e\}\subset Q\times Q=Q^2$。在 $Q^2-(0,0)$ 中将 (u_1,u_2) 与 $\lambda(u_1,u_2)=(\lambda u_1,\lambda u_2)$ $(\lambda\in Q-(0))$ 等同，所得的商空间 Γ 称为四元射影直线。记 $p:Q^2-(0,0)\to\Gamma$ 为自然投射，使得 $\rho(u_1,u_2)=[u_1,u_2]\in\Gamma$，其中 Γ 取 $Q^2-(0,0)$ 的商拓扑。

易知，$\rho|S^7:S^7\to\Gamma$ 是在上的。因对 $[u_1, u_2]\in\Gamma$，有 $c=\dfrac{(u_1, u_2)}{(\|u_1\|^2+\|u_2\|^2)^{\frac{1}{2}}}\in S^7$，$\rho(c)=[u_1, u_2]$；且对于 (u_1, u_2) 与 $(u_1',u_2')\in S^7$，有 $\rho(u_1,u_2)=\rho(u_1', u_2')$，当且仅当 $u_1'=\lambda u_1$，$u_2'=\lambda u_2$，其中 $\lambda\in Q$，$\|\lambda\|=1$。故对于 $[u_1,u_2]\in\Gamma$，$\rho^{-1}([u_1,u_2])$

与 Q 中的单位球 S^3 是同胚的。

利用球极投射，知 $S^4 \approx E^4 \cup (\infty) = Q \cup (\infty)$．令 $\chi: \Gamma \to S^4$，使得对于 $[u_1, u_2] \in \Gamma$，有

$$\chi([u_1, u_2]) = \begin{cases} u_1/u_2, & u_2 \neq 0, \\ \infty, & u_2 = 0. \end{cases}$$

类似地，可验证 χ 是（在上）同胚映射。

定义 $p = \chi\rho | S^7 : S^7 \to S^4$，则 S^7 是以 S^4 为底空间，S^3 为导空间，p 为投射的纤维丛。

事实上，设 $U = Q$，$V = S^4 - (0)$，则 U 与 V 是 S^4 的开集，$S^4 = U \cup V$。命

$\phi_V : U \times S^3 \to p^{-1}(U)$，$\phi_V : V \times S^3 \to p^{-1}(V)$，分别为下式规定的映射

$$\phi_V(u, v) = \left(\frac{uv}{\sqrt{1 + \|u\|^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 + \|u\|^2}} \right),$$

$$u \in U,\ v \in S^3,$$

$$\Phi_V(u, v) = \begin{cases} \left(\dfrac{v}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\|u\|^2}}}, \dfrac{v}{u\sqrt{1 + \dfrac{1}{\|u\|^2}}} \right), \\ \qquad\qquad u \in V - (\infty),\ v \in S^3, \\ (v,\ 0), \qquad u = \infty,\ v \in S^3. \end{cases}$$

则 ϕ_V 与 ϕ_V 是（在上）同胚映射，且

$$p\phi_V(u, v) = u, \qquad u \in U,$$

$$p\phi_V(u, v) = u, \qquad u \in V.$$

故 p 是丛映射。

命题4.2　当 $q \geq 2$，有 $\pi_q(S^4) \approx \pi_q(S^7) \oplus \pi_{q-1}(S^3)$。

证明　取 $b_0 \in S^4$，$e_0 \in p^{-1}(b_0) \subset S^7$。因为 $p^{-1}(b_0)$ 与 S^3 同胚，它在 S^7 中可缩成一点，根据定理Ⅱ.7.3，当 $q \geq 2$

$$\pi_q(S^7, p^{-1}(b_0)) \approx \pi_q(S^7) \oplus \pi_{q-1}(p^{-1}(b_0))$$
$$\approx \pi_q(S^7) \oplus \pi_{q-1}(S^3).$$

再由推论3.2

$$\pi_q(S^7, p^{-1}(b_0)) \approx \pi_q(S^4), \quad q \geqslant 2.$$

故　$$\pi_q(S^4) \approx \pi_q(S^7) \oplus \pi_q(S^3), \quad q \geqslant 2. \ \rrbracket$$

例如　$\pi_5(S^4) \approx \pi_4(S^3)$，　$\pi_6(S^4) \approx \pi_5(S^3)$

$\pi_7(S^4) \approx J \oplus \pi_6(S^3)$，……等。

3．n＝8的情形

利用Cayley数系，可以类似地构造纤维映射 $p: S^{15} \to S^8$。先简单介绍Cayley数系的定义。

在 $W = Q \times Q = E^8$ 中引入乘法运算：$W \times W \to W$。对于 $c = (u_1, u_2)$，$c' = (u_1', u_2') \in W$，命 $cc' = (u_1 u_1' - \bar{u}_2' u_2, \ u_2' u_1 + u_2 \bar{u}_1')$，其中 $\bar{u}$ 表示 $u \in Q$ 的共轭四元数。则（e，0）是此乘法的单位元，记为 e'。零元（0，0）$\in W$，仍记作0。

对于 $c = (u_1, u_2) \in W$，称 $\bar{c} = (\bar{u}_1, -u_2)$ 为 c 在 W 中的共轭元素。直接验证，知

（i）$c\bar{c} = (u_1\bar{u}_1 + \bar{u}_2 u_2, \ 0) = \|c\|^2 e'$，　其中　$\|c\| = (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 称为 c 在 W 中的模数，$\|u_i\|$ 表示 u_i 在 Q 中的模数，$i = 1, 2$；

（ii）如 $c \neq (0, 0)$，则存在唯一的逆元素 $c^{-1} = \dfrac{\bar{c}}{\|c\|^2}$；

（iii）设 c 与 $c' \in W$，则 $\|cc'\| = \|c\|\|c'\|$。

进而，W 是非结合的可除代数，称为Cayley数系。现举一例说明它的非结合性：

$$[(i,0)(0,i)](0,k) = (0,-1)(0,k) = (-k,0),$$
$$(i,0)[(0,i)(0,k)] = (i,0)(j,0) = (k,0).$$

正因为如此，我们不能完全搬用上述作复射影直线及四元射影直线的作法（在作商空间时，需要乘法的结合律）。但是，注意到，对 c 与 $c' \in W, c' \neq 0$，仍有 $(cc')(c')^{-1} = c$（直接验证），这

种“结合”性正是下面所要用到的。

现在转入本节的主题。

我们已有

$S^{15}=\{(c_1,\ c_2)\in W\times W\mid c_1\bar{c}_1+c_2\bar{c}_2=e'\}\subset W\times W=W^2$,

$S^7=\{c\in W\mid \|c\|=1\}\subset W$,

$S^8\approx E^8\cup(\infty)=W\cup(\infty)$.

现在定义 $p:S^{15}\to S^8$ 为下式规定的单值对应。即对于$(c_1,c_2)\in S^{15}$，有

$$p(c_1,c_2)=\begin{cases} c_1c_2^{-1}, & c_2\neq 0, \\ \infty, & c_2=0. \end{cases}$$

可以验证，

(i) p 是连续映射。对于 $a=(c_1,c_2)\in S^{15}$，当 $c_2\neq 0$，不难看出 p 在 a 处连续；而如果 $\{c_2^{(n)}\mid c_2^{(n)}\in W\}\to 0$，则 $\{c_1^{(n)}\mid c_1^{(n)}\in W\}\to c_1\neq 0$，因之 $\{c_1^{(n)}(c_2^{(n)})^{-1}\}\to\infty$，即 p 在 a 处亦连续。

(ii) 对于 $c\in W\subset S^8$，有$p^{-1}(c)=\{(c_1,c_2)\in W\times W\mid c_1c_2^{-1}=c\}\cap S^{15}$，及 $p^{-1}(\infty)=\{(c,\ 0)\in W\times W\}\cap S^{15}$。即 S^8 上任一点在 p 下的逆像集是 S^{15} 中与 S^7 同胚的子集。

特别地，$p:S^{15}\to S^8$ 是在上的。

S^{15} 是以 S^8 为底空间，S^7 为导空间，p 为为投射的纤维丛。

事实上，记 $U=W$，$V=S^8-(0)$，则 U 与 V 是 S^8 的开集，$S^8=U\cup V$。

命 $\phi_U:U\times S^7\to p^{-1}(U)$，$\phi_V:V\times S^7\to p^{-1}(V)$ 分别为下式规定的映射

$$\phi_U(c,d)=\left(\frac{cd}{\sqrt{1+\|c\|^2}},\ \frac{d}{\sqrt{1+\|c\|^2}}\right),$$

$$c\in U,d\in S^7,$$

$$\phi_V(c,d)=\begin{cases}\left(\dfrac{d}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\|c\|^2}}},\ \dfrac{c^{-1}d}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\|c\|^2}}}\right), & c\in V-(\infty),\ d\in S^7,\\ (d,\ 0) & c=\infty,\ d\in S^7.\end{cases}$$

则 ϕ_U 与 ϕ_V 是（在上）同胚映射，且

$$p\phi_U(c,d)=c,\qquad c\in U,$$
$$p\phi_V(c,d)=c,\qquad c\in V.$$

故 p 是丛映射.

命题4.3 当 $q\geqslant 2$，$\pi_q(S^8)\approx\pi_q(S^{15})\oplus\pi_{q-1}(S^7)$.

证明的方法同命题4.2.]

例如 $2\leqslant q<15$,

$$\pi_q(S^8)\approx\pi_{q-1}(S^7),$$
$$\pi_{15}(S^8)\approx J\oplus\pi_{14}(S^7).$$

附记1. 在上面构造纤维映射 $p:S^3\to S^2$，$S^7\to S^4$，$S^{15}\to S^8$ 中本质地用到C，Q，W是可除代数这个性质.

附记2. 显然，恒同映射 $i:S^1\to S^1$ 是纤维映射. 是否存在除 $n=1$，2，4，8外的纤维映射 $p:S^{2n-1}\to S^n$ 呢？这个在同伦论中的重要问题，直至1960年，J. F. Adams在[8]中才作了证明：存在纤维射 $p:S^{2n-1}\to S^n$，只能是 $n=1,2$，4，8

§5 复叠空间

在§1与§2所举的纤维映射和丛映射的例子中，例1.2的指数映射 $p:E^1\to S^1$，例2.4的叠合映射 $p:S^n\to P^n(n\geqslant 2)$，它们除了共同具有复叠同伦这一根本的性质之外，作为丛映射，其导空间前者是整数集J，后者为二点集{1，2}，导空间的拓扑均是离散拓扑. 这种特殊的丛映射就是复叠映射. 一般地有下面的定

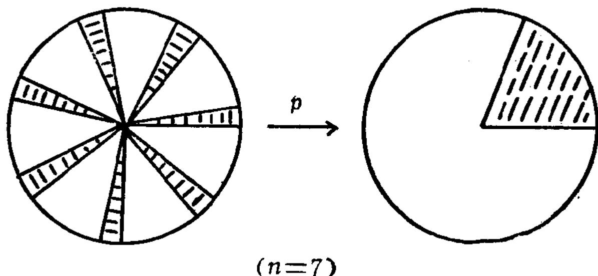
义。

定义5.1　设拓扑空间E是以B为底空间，F为导空间，$p:E\to B$为投射的纤维丛。如果F的拓扑是离散的，则E称为对p而言B上的**复叠空间**。p称为**复叠投射**。

除了上述两个例子外，我们再举两例。

例5.1　设拓扑空间F具有离散拓扑，B为任一个拓扑空间，则$p_1:B\times F\to B$是复叠投射。

例5.2　对正整数n，命$p:S^1\to S^1$，使$p(z)=z^n$，则p是复叠投射（见图5.1）。



$(n=7)$

图　5.1

本节讨论复叠空间的一些性质，先作一点预备。

定义5.2　拓扑空间X称为**局部路径连通**的，如果对任意$x\in X$，及包含x的任意邻域U，则有包含x的邻域$V\subseteq U$，使得对每一个$x'\in V$，都存在映射：$(I,\ (0),\ (1))\to(U,\ x,\ x')$，即在$U$内能路径连通至$x$。

注意，并非路径连通空间总是局部路径连通空间。如图5.2，

$$X_0=\left\{\left(x,\ \sin\frac{\pi}{x}\right)\Big|x\in(0,\ 1]\right\}\cup\{(0,y)\,|\,y\in[-1,1]\}$$

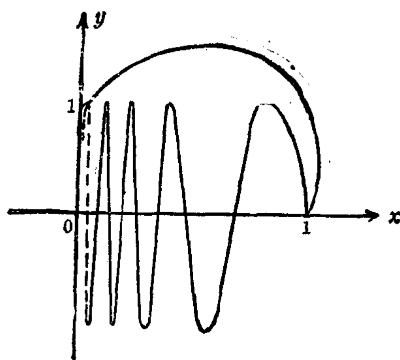


图 5.2

它是连通而不是路径连通的典型例子。如将(1,0)与(0,1)用孤线联结，X_0与孤线的并集记为X。则X是路径连通的，然而它不是局部路径连通空间。这只须考虑原点附近的情形就可看出。

尽管如此，我们有下面的引理。

引理5.1 设X是连通且局部路径连通的拓扑空间，则X必路径连通。

证明 对$x\in X$，记D_x是X中能与x路径相连的点所成的子集。

D_x是X的开集。事实上，如果$y\in D_x$，根据X局部路径连通的定义，对于y的邻域X，有开集V_y，使得$y\in V_y\subseteq X$。V_y中的点皆能与点y在X中用路径相连，因而能与x路径相连，故$V_y\subseteq D_x$。

D_x是X的闭集。事实上，如果$y\in \bar{D}_x$，即任何包含y的邻域皆有D_x的点。如上所述，在V_y中有$y_0\in D_x$，知y能与y_0在X中用路径相连，因而能与x路径相连。即$y\in D_x$，$\bar{D}_x=D_x$。

根据假设，X是连通空间，从$D_x\neq\varnothing$，知$D_x=X$。即X路径连通。】

由此很容易地导出下面两个引理。

引理5.2 设U是局部路径连通空间X的开子集，则V的任一个连通分支必是路径连通的开集。（复习题）】

引理5.3 X是局部路径连通空间，当且仅当X具有一个由路径连通的开子集组成的基。】

现在转入本节的主题。

定理5.4　设B是连通且局部路径连通空间，$p:E\to B$是映射。则E是对p而言B上的复叠空间，当且仅当

(i) p是在上的；

(ii) 对每一个$b\in B$，B中都有包含b的连通邻域U_b，使得p将$p^{-1}(U_b)$的每个连通分支同胚映射至U_b上。

证明　必要性　设E是对p而言B上的复叠空间，p的在上性是明显的。记F为其导空间，对于任意$b\in B$，有邻域U_b及同胚映射$\phi_{U_b}:U_b\times F\to p^{-1}(U_b)$，使得$p\phi_{U_b}(x,y)=x$，$(x,y)\in U_b\times F$。因$B$是局部路径连通空间，根据引理5.2，不妨设$U_b$是包含$b$的连通邻域（否则，可取$U_b$中包含$b$的连通分支）。

对于每一个$u\in p^{-1}(b)$，有$y_u\in F$，使得$u\in\phi_{U_b}(U_b\times(y_u))$。

命$V_u=\phi_{U_b}(U_b\times(y_u))$。因$F$具有离散拓扑，$\phi_{U_b}$是同胚映射，知$V_u$是$p^{-1}(U_b)$因而是$E$的开子集，且$p|V_u:V_u\to U_b$是（在上）同胚映射。且$V_u$即为$p^{-1}(U_b)$中的连通分支。因为如$u'\neq u$，$u'\in p^{-1}(b)$，知$V_{u'}\cap V_u=\varnothing$，且$p^{-1}(U_b)=\bigcup\limits_{u\in p^{-1}(b)}V_u$。故条件(ii)成立。

充分性　设条件(i)与(ii)都成立。对任意$b\in B$，记$\gamma(b)$为$p^{-1}(U_b)$的连通分支集合的基数（即分支"个数"）。设U'是U_b的非空连通开子集，由条件(ii)易见，$p^{-1}(U')$的连通分支集合的基数仍为$\gamma(b)$。于是对任意$b'\in B$，因p是在上的，B是连通且局部路径连通的，利用引理5.3，知$\gamma(b')=\gamma(b)$。记$\gamma=\gamma(b)$。

命F为离散拓扑空间，基本数为γ。η是F到$p^{-1}(U_b)$的连通分支集合的一一对应。

定义$\phi_{U_b}:U_b\times F\to p^{-1}(U_b)$，使得对于$(x,y)\in U_b\times F$有$\phi_{U_b}(x,y)\in\eta(y)$，$p\phi_{U_b}(x,y)=x$。根据条件(ii)，$\phi_{U_b}$是同胚映射。故$p$是复叠投射。▌

推论5.5 假设同定理5.4。再设 $p: E\to B$ 为复叠投射.则 p 是局部同胚映射。即对任意 $e\in E$，存在包含 e 的开集 V_e，使得 p 将 V_e 同胚映射至 B 中某一个开集上.

证明 记 $b=p(e)\in B$，由定理5.4，有 b 的邻域 U_b，使得 $p^{-1}(U_b)$ 是互不相交的开集 $V_u(u\in p^{-1}(b))$ 的并集。命 V_e 是其中包含 e 的开集，则 $p|V_e$ 将 V_e 同胚映射至 U_b 上。 ▌

推论5.6 假设同定理5.4，$p:E\to B$ 为复叠映射，则 p 是开映射。即对任意 E 中的开子集 C，$p(C)$ 是 B 中开子集。

证明 只须指出，对每一个 $c\in C$，存在包含 c 的邻域 $W_c\subset C$，使 $p(W_c)$ 是 B 的开子集。而由定理5.4条件(ii)（或推论5.5），这是明显的。▌

现在我们来考虑复叠投射的同伦与升腾等性质。我们自然仍假定 B 是连通且局部路径连通空间。

命题5.7 设 E 是路径连通空间，$p: F\to B$ 为复叠投射，则

$$p_*:\pi_q(E)\approx\pi_q(B),\quad q\geqslant 2.$$

及 $p_*:\pi_1(E)\to\pi_1(B)$ 是在中同构。

证明 取 $b_0\in B$，$e_0\in p^{-1}(b_0)$．由推论3.2,知 $p_*:\pi_q(E, p^{-1}(b_0))\approx\pi_q(B, b_0)$，$q\geqslant 2$。因 $p^{-1}(b_0)$ 具有离散拓扑，有 $\pi_q(E, p^{-1}(b_0), e_0)=\pi_q(E, \{e_0\}, e_0)=\pi_q(E, e_0)$，$q\geqslant 2$。故 $p_*:\pi_q(E)\approx\pi_q(B)$，$q\geqslant 2$。

其次，设 $f:S^1\to E$ 为映射，$pf\simeq c$（常值）$:S^1\to B$，$c(S^1)=b_0$。根据 CHP 有 $f\simeq f':S^1\to E$，使得 $pf'=c$，即 $f'(S^1)\subset p^{-1}(b_0)$。因 $p^{-1}(b_0)$ 具有离散拓扑，知 $f'(S^1)$ 为常值。故 $p_*:\pi_1(E)\to\pi_1(B)$ 是在中同构。▌

命题5.8 设 $p:E\to B$ 是复叠映射；X 是连通空间；f 与 g：$X\to E$ 为两个映射，使得 $pf=pg$ 及对某个 $x_0\in X$，有 $f(x_0)=g(x_0)$。则 $f=g$。

证明 记

$X_1=\{x\in X|f(x)=g(x)\}$，　$X_2=\{x\in X|f(x)\neq g(x)\}$。

首先，X_1 是X的开集。事实上，如 $x\in X_1$，根据推论 5.5，对于 $f(x)\in E$，E 中有包含 $f(x)$ 的开集 $V_{f(x)}$ 及 B 中包含 $pf(x)$ 的开集 $U_{pf(x)}$，使得 $p|V_{f(x)}:V_{f(x)}\to U_{pf(x)}$ 是同胚映射。记 $W_x=f^{-1}(V_{f(x)})\cap g^{-1}(V_{f(x)})$，它是$X$中包含 x 的开集。对于 $x'\in W_x$，即 $f(x')$ 与 $g(x')\in V_{f(x)}$，因 $pf(x')=pg(x')$ 及 $p|V_{f(x)}$ 是同胚映射，知 $f(x')=g(x')$。即 $x'\in X_1$。故 $x\in W_x\subseteq X_1$。

其次，X_2 亦是X的开集。事实上，如 $x\in X_2$，即 $f(x)\neq g(x)$，而 $pf(x)=pg(x)$。根据定理 5.4，有分别包含 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的在 E 中互不相交的开集 $V_{f(x)}$ 与 $V_{g(x)}$，而 p 将它们分别同胚映射至 B 中包含 $pf(x)$ 的开集 $U_{pf(x)}$。记 $W_x=f^{-1}(V_{f(x)})\cap g^{-1}(V_{g(x)})$，它是$X$中包含 x 的开集。易见 $W_x\subseteq X_2$。

最后，$X=X_1\cup X_2$，$x_0\in X_1\neq\varnothing$。根据$X$的连通性有$X_2=\varnothing$。故 $f=g$。】

推论5.9　设 $p:E\to B$ 为复叠映射，$\sigma:I\to B$ 为映射。记 $\sigma(0)=b_0$，取 $e_0\in p^{-1}(b_0)$。则存在唯一的映射 $\tau:I\to E$，使得

$$\tau(0)=e_0,\ \text{及}\quad p\tau=\sigma.$$

证明　根据 p 具有 CHP，因此存在性是显然的。唯一性由命题5.8即可得到。】

附记　此性质称为复叠路径性质及唯一路径升腾性质，它是引理Ⅱ.4.4的推广。

关于一般的升腾问题，有

定理5.10　设 E 是路径连通空间，B 与 X 是连通且局部路径连通空间，$p:E\to B$ 为复叠映射，$g:X\to B$ 为映射。取 $x_0\in X$，$b_0=g(x_0)$，$e_0\in p^{-1}(b_0)$。则 g 有升腾映射 $f:(X,x_0)\to(E,e_0)$，当且仅当 $g_*\pi_1(X,x_0)\subseteq p_*\pi_1(E,e_0)$。

证明　必要性　设 $f:(X,x_0)\to(E,e_0)$ 为映射，使得 $pf=g$，

则　$g_*\pi_1(X,x_0)=p_*f_*\pi_1(X,x_0)\subseteq p_*\pi_1(E,e_0)$。

充分性　对于$x\in X$，存在路径 $\omega:(I,(0),(1))\to(X,x_0,x)$。记 $\sigma=g\omega:I\to B$，$\sigma(0)=b_0$，$\sigma(1)=g(x)$。根据推论 5.9，有唯一的路径 $\tau:I\to E$，使得 $p\tau=\sigma$，$\tau(0)=e_0$。命 $f:X\to E$，使得 $f(x)=\tau(1)$。则

（i）f 的定义与路径 ω 的选取无关。事实上，设 $\omega':(I,(0),(1))\to(X,x_0,x)$ 为另一条路径，及 $\sigma'=g\omega':I\to B$，$\tau':I\to E$，使得

$$p\tau'=\sigma',\qquad \tau'(0)=e_0.$$

令 $\lambda=\omega\cdot\omega'^{-1}:I\to X$ 为映射，使得

$$\lambda(t)=\begin{cases}\omega(2t), & t\leqslant\frac{1}{2},\\ \omega'(2-2t), & t\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

则 $[\lambda]\in\pi_1(X,x_0)$。根据假设条件，$[g\lambda]\in p_*\pi_1(E,e_0)$。即存在映射 $h:(I,\partial I)\to(E,e_0)$，使得$g\lambda=ph$。由推论5.9的唯一路径升腾性质，对于 $t\in I$，有 $\tau(t)=h\left(\frac{t}{2}\right)$，$\tau'(t)=h\left(1-\frac{t}{2}\right)$。特别地，$\tau(1)=h\left(\frac{1}{2}\right)=\tau'(1)$。

(ii)　$f(x_0)=e_0$，$pf=g$（显然）。

(iii)　f 是连续的。对于 $x\in X$，对 $g(x)\in B$ 有包含 $g(x)$ 的连通邻域$U_{g(x)}$。记$V_{f(x)}$是 $p^{-1}(U_{g(x)})$中包含 $f(x)$ 的连通分支，p 把它同胚映射至$U_{g(x)}$上。记 $p^{-1}:U_{g(x)}\to V_{f(x)}$ 为此逆同胚映射。

命 $W=g^{-1}(U_{g(x)})\subseteq X$ 及 $W_1\subseteq W$ 为包含x的邻域，使得对任意 $x'\in W_1$，在 W 内 x' 与 x 路径相连。下面验证 $f|W_1=p^{-1}g|W_1$，因而f 在点 x 处是连续的。

事实上，显然 $f(x)=p^{-1}g(x)$。对任意 $x'\in W_1$，有路径 $\eta:(I,(0),(1))\to(W,x,x')$。令$\omega'=\omega\cdot\eta:(I,(0),(1))\to(X,x_0,x')$

为映射，使得

$$\omega'(t)=\begin{cases}\omega(2t), & t\leqslant\frac{1}{2},\\ \eta(2t-1), & t\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

令

$$\sigma'=g\omega':(I,(0),(1))\rightarrow(X,b_0,g(x'))$$

及 $\tau':I\rightarrow E$为映射，使得

$$\tau'(t)=\begin{cases}\tau(2t), & t\leqslant\frac{1}{2},\\ p^{-1}g\eta(2t-1), & t\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

其中 $\tau:I\rightarrow E$ 如前所述，有 $p\tau=\sigma=g\omega$，$\tau(0)=e_0$。于是知

$$p\tau'=\sigma',\ \ \tau'(0)=\tau(0)=e_0.$$

故

$$f(x')=\tau'(1)=p^{-1}g(x')\ ]$$

附记 根据命题5.8，在本定理的条件下，g 的升腾映射 f 是唯一的。

最后，关于复叠空间的导空间，有

命题5.11 设 $p:E\rightarrow B$ 为复叠投射，E 是路径连通空间，$b_0\in B$，$e_0\in p^{-1}(b_0)$。则 p 的导空间 F 的基数（即集 $p^{-1}(b_0)$ 的基数）等于 $p_*\pi_1(E,e_0)$ 在群 $\pi_1(B,b_0)$ 中的指数。

证明 记 $\pi'=p_*\pi_1(E,e_0)$，$\tilde{\pi}$ 是群 $\pi_1(B,b_0)$ 对子群 π' 而言的右陪集的集合。所谓对 π' 的右陪集，即形如 $\pi'a=\{p_*(\gamma)a\,|\,\gamma\in\pi_1(E,e_0)\}\subseteq\pi_1(B,b_0)$ 的集合。而 a 与 a' 属于同一右陪集，当且仅当 $aa'^{-1}\in\pi'$。记 $\eta:\pi_1(B,b_0)\rightarrow\tilde{\pi}$ 为自然对应，即对 $a\in\pi_1(B,b_0)$，$\eta(a)=\pi'a\in\tilde{\pi}$。

现在定义 $\tilde{p}: p^{-1}(b_0) \to \tilde{\pi}$。对于 $x \in p^{-1}(b_0)$，因有映射 $\omega: (I,(0),(1)) \to (E, e_0, x)$，命 $\tilde{p}(x) = \eta[p\omega] \in \tilde{\pi}$。则

(i) $\tilde{p}$ 是单值对应，即与 ω 选取无关。设 $\omega': (I,(0),(1)) \to (E, e_0, x)$ 是映射，知 $\omega \cdot (\omega')^{-1}: (I, \partial I) \to (E, e_0)$ 为映射，其中

$$(\omega \cdot \omega'^{-1})(t) = \begin{cases} \omega(2t), & t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \omega'(2-2t), & t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

于是

$$[p\omega] \cdot [p\omega']^{-1} = [p\omega \cdot p\omega'^{-1}] \in p_* \pi_1(E, e_0) = \pi'.$$

故

$$\eta[p\omega] = \eta[p\omega'].$$

(ii)　$\tilde{p}$ 的在上性，由 p 具有 CHP 即可得到。

(iii)　$\tilde{p}$ 的一一对应性。设 $\eta[p\omega] = \eta[p\omega']$，其中 $\omega: (I,(0),(1)) \to (E, e_0, x')$ 为映射，$x' \in p^{-1}(b_0)$。知

$$[p\omega] = p_*[\sigma] \cdot [p\omega'] = [p(\sigma \cdot \omega')] \in \pi_1(B, b_0),$$

其中 $\sigma: (I, \partial I) \to (E, e_0)$。又 p 对 $(I, \partial I)$ 具有 $CHFP$。于是 $\omega \simeq \sigma \cdot \omega'$。特别地，有 $x' = (\sigma \cdot \omega')(1) = \omega(1) = x$。】

例5.3　对指数映射 $p: E^1 \to S^1$，因 $p_*(E^1, 0)$ 是 $\pi_1(S^1, 1)$ 的单位元群，$p^{-1}(1)$ 是全体整数集 J。故知 $\pi_1(S^1, 1)$ 与 J 成一一对应。

例5.4　复叠投射 $p: S^n \to P^n$，$n \geqslant 2$（见例2.4）。因 $\pi_1(S^n) = 0$ 及对于 $b_* \in P^n$，有 $p^{-1}(b^*) = \{b, \tilde{b}\}$，故

$$\pi_1(P^n, b^*) \approx J_2.$$

§6　万有复叠空间

关于复叠空间有一个问题尚待讨论，即复叠空间的存在性。本节的主要定理6.1，回答了这个问题，并进而介绍万有复叠空

间的概念与性质。

先作一点预备。

定义6.1　拓扑空间X称为**局部单连通的**，如果对任意$x\in X$及包含x的任意邻域U，则有包含x的邻域$V\subseteq U$，使得对任一映射$f:(S^1,p_0)\to(V,x)$，有$f\simeq\mu$(常值)$:(S^1,p_0)\to(U,x)$。即V中任一x处的闭路径在U中(相对)同伦于零。

定义6.2　拓扑空间X称为**半局部单连通的**，如果对任意$x\in X$，总存在包含x的邻域V，使得对任一映射$f:(S^1,p_0)\to(X,x)$有$f\simeq\mu$(常值)$:(S^1,p_0)\to(X,x)$。即V中任一x处的闭路径在X中(相对)同伦于零。

例如，有限（单纯）复形是局部单连通空间。因为其顶点的星形可缩成一点。如图6.1，

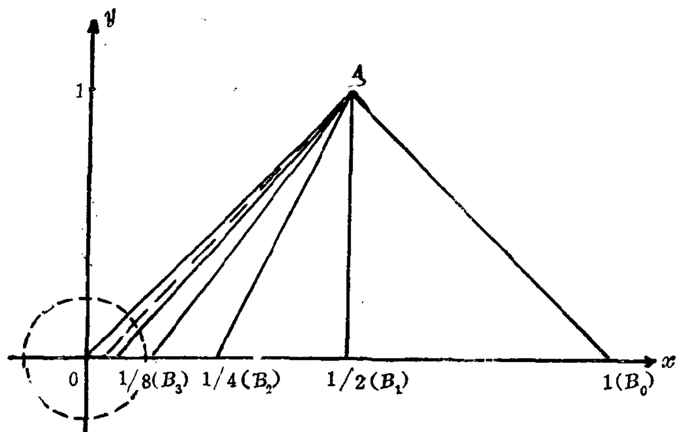


图　6.1

$$X=\left\{\ \overline{AO}\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{AB_n}\ \middle|\ B_n=\left(\frac{1}{2^n},0\right),\ A=\left(\frac{1}{2},1\right)\right\}.$$

易见，X是单连通的(可缩成一点A)。但它不是局部单连通的，

只须注意0点附近的情形。

显然，单连通空间或局部单连通空间都是半局部单连通空间。

现在转入本节的主题。

定理6.1 设B是连通的、局部路径连通且半局部单连通空间，$b_0\in B$，π'是$\pi_1(B,b_0)$的子群。则存在路径连通空间E，就映射$p:E\to B$而言是B上的复叠空间；且$p_*\pi_1(E,e_0)=\pi'$，其中$e_0\in p^{-1}(b_0)$。

证明 我们分以下几个步骤来证明：

1. 集合E及对应$p:E\to B$。

令$\Omega=\{\alpha:(I,(0))\to(B,b_0)\mid\alpha$是映射$\}$，即$B$中所有以$b_0$为始点的路径的集合。

对于α与$\beta\in\Omega$，如果$\alpha(1)=\beta(1)$，且$[\alpha\cdot\beta^{-1}]\in\pi'$，我们称$\alpha$与$\beta$是$\pi'$-等价的，记为$\alpha\sim\beta$。因为$\pi'$是群，易见$\pi'$-等价是等价关系。命$E$是$\Omega$中的$\pi'$-等价类的集合。对$\alpha\in\Omega$，记$\langle\alpha\rangle$为$\alpha$所在的$\pi'$-等价类。即$E=\{\langle\alpha\rangle\mid\alpha\in\Omega\}$。

定义$p:E\to B$，使得$p(\langle\alpha\rangle)=\alpha(1)$。因$B$是路径连通的，知$p$是在上对应。

2. 拓扑空间E

设$\langle\alpha\rangle\in E$，$U$是$B$中$\alpha(1)$的邻域。命

$$(\langle\alpha\rangle,U)=\{\langle\alpha\cdot\gamma\rangle\in E\mid\gamma\text{ 是}U\text{中以}\alpha(1)\text{为始点的路径}\}$$

(见图6.2)，则一切E中的子集$(\langle\alpha\rangle,U)$组成E上拓扑的基。事实上：

(i) $E=(\langle c\rangle,B)$，其中$c:I\to B$是常值映射，$c(I)=b_0$；

(ii) 如果$\langle\xi\rangle\in(\langle\alpha\rangle,U)\cap(\langle\beta\rangle,U')$，即

$$\langle\xi\rangle=\langle\alpha\cdot\gamma\rangle=\langle\beta\cdot\gamma'\rangle,\ \gamma(I)\subset U,\ \gamma'(I)\subset U.$$

知$\xi(1)\in U\cap U'$，且$(\langle\xi\rangle,U\cap U')\subseteq(\langle\alpha\rangle,U)\cap(\langle\beta\rangle,U')$。由此，$E$成为拓扑空间。

3. $p:E\to B$是连续的。

设U是B中开集，则对每一个 $\langle\alpha\rangle\in p^{-1}(U)$。因

$\alpha(1)=p\langle\alpha\rangle\in U$,

显然 $(\langle\alpha\rangle, U)$ 是E中基开集，且有$p(\langle\alpha\rangle, U)\subseteq U$。

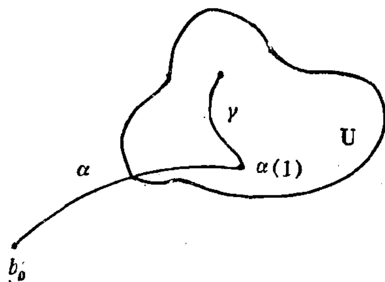


图 6.2

4. $p:E\to B$ 是复叠映射。

由假设，B是局部路径连通，半局部单连通空间。根据引理5.3，对于任意$b\in B$，有b在B中路径连通邻域U_b，使得U_b中点b处的闭路径在B中（相对）同伦于零。明显地，B中一切这样的邻域组成B的一个基$\mathscr{B}$；相应地在E中一切邻域$(\langle\alpha\rangle, U)$，其中$U\in\mathscr{B}$，亦组成一个基。以下仅用这种邻域$(\langle\alpha\rangle, U)$，并称为典型邻域。

我们验证：

（i） 对 $e=\langle\alpha\rangle\in p^{-1}(b)$，$p_e=p|(\langle\alpha\rangle,U_b):(\langle\alpha\rangle,U_b)\to U_b$是（在上）同胚映射。事实上，由$U_b$是路径连通的，$p_e$是在上的；设$\langle\beta\rangle$与$\langle\beta'\rangle\in(\langle\alpha\rangle,U_b)$，且$p\langle\beta\rangle=p\langle\beta'\rangle$，即$\beta(1)=\beta'(1)$。则$\langle\beta\rangle=\langle\alpha\cdot\gamma\rangle$,$\langle\beta'\rangle=\langle\alpha\cdot\gamma'\rangle$。因$\gamma\cdot(\gamma')^{-1}$是$U_b$中$b$处的闭路径，从而（相对）同伦于零，可见$\langle\beta\rangle=\langle\beta'\rangle$；设$(\langle\alpha'\rangle, U')\subset(\langle\alpha\rangle,U_b)$，知 $p_e(\langle\alpha'\rangle,U')=p(\langle\alpha'\rangle,U')=U'$（$U$是路径连通的），它在$B$中因而在$U$中是开集，即$p_e$是开映射。

(ii) $p^{-1}(U_b)=\bigcup_{e\in p^{-1}(b)}(e, U_b)$。事实上，设$\langle\beta\rangle\in p^{-1}(U_b)$。取路径$\eta:(I,(0),(1))\to(U_b,\beta(1),b)$，于是$\langle\beta\rangle=\langle\alpha\cdot\eta^{-1}\rangle$，其中$\langle\alpha\rangle=\langle\beta\cdot\eta\rangle$。又知$\langle\beta\rangle\in(\langle\alpha\rangle,U_b)$,$p\langle\alpha\rangle=\eta(1)=b\in U_b$。故$\langle\beta\rangle\in\bigcup_{e\in p^{-1}(b)}(e, U_b)$。

(iii) 设e与$e'\in p^{-1}(b)$，$e\neq e'$，则 $(e,U_b)\cap(e',U_b)$

$=\varnothing$。事实上，记 $e=\langle\alpha\rangle$，$e'=\langle\alpha'\rangle$。如果 $\langle\beta\rangle\in(\langle\alpha\rangle,U_b)\cap(\langle\alpha'\rangle,U_b)$，知 $\langle\alpha\cdot\gamma\rangle=\langle\alpha'\cdot\gamma'\rangle$，其中 $\gamma,\gamma':(I,(0))\to(U_b,b)$ 为映射；知 $\gamma(1)=\gamma'(1)$，$\gamma\cdot\gamma'^{-1}$ 是 U_b 中 b 处的闭路径。根据 U_b 的性质，它（相对）同伦于零。从而 $\langle\alpha\rangle=\langle\alpha'\rangle$。此与假设矛盾。

总之，根据定理5.4，E 是以 B 为底空间，p 为投射的复叠空间。

5. E 是路径连通空间。

记 $e_0=\langle c\rangle$，其中 $c\in\Omega$，$c(I)=b_0$。对任意 $\langle\alpha\rangle\in E$，$0\leqslant t\leqslant 1$，令 $\alpha_t:I\to B$ 为映射，使得 $\alpha_t(s)=\alpha(ts)$，$s\in I$；及 $f:I\to E$，使得 $f(t)=\langle\alpha_t\rangle$，$t\in I$。易见 $f(0)=\langle\alpha_0\rangle=e_0$，$f(1)=\langle\alpha\rangle$。因此欲证 E 是路径连通的，只须指出 f 的连续性。

为此，设 $f(t_0)\in(\langle\xi\rangle,U)$，其中 U 为 B 中包含 $\xi(1)$ 的开集，$\xi\in\Omega$。知 $pf(t_0)=\alpha(t_0)\in U$，从而有包含 t_0 的开区间 $J\subset I$，使得 $\alpha(J)\subset U$。对于 $t\in J$，记 $\eta_t:I\to B$，使得

$$\eta_t(S)=\alpha(t_0+S(t-t_0))\subset U.$$

于是 $f(t)=\langle\alpha_t\rangle=\langle\alpha_{t_0}\cdot\eta_t\rangle\in(\langle\alpha_{t_0}\rangle,U)\subset(\langle\xi\rangle,U)$，$t\in J$，即 f 是连续的。

6. $p_*\pi_1(E,e_0)=\pi'$。

由5.的证明，对于 $\langle\alpha\rangle\in E$，有映射 $f:(I,(0)\to(E,e_0)$，使得 $pf=\alpha$。根据复叠投射的路径升腾唯一性（推论5.9），f 是 $\alpha:I\to B$ 的唯一的升腾。则 $[\alpha]\in p_*\pi_1(E,e_0)$，当且仅当 f 在 E 中是闭路径。即 $f(1)=e_0$，或即 $\langle\alpha\rangle=e_0$。按 π'-等价定义，即 $[\alpha]\in\pi'$。】

定义6.3 设路径连通空间 E 是就映射 $p:E\to B$ 而言 B 上的复叠空间，E 称为 B 的**万有复叠空间**，如果 $\pi_1(E)=0$，即 E 是单连通的。

推论6.2 设 B 是连通的，局部路经连通且半局部单连通的空间，则对 B 存在万有复叠空间 E。

证明 只须在定理6.1中取 $\pi'=\{0\}$，则根据命题5.7，

$$\pi_1(E)=0.】$$

下面的定理说明了万有复叠空间的意义。

定理6.3 设B是连通的且局部路径连通空间，而路径连通空间E与E'分别就映射$p:E\to B$，$p':E'\to B$而言是B的万有复叠空间及复叠空间。又设$b_0\in B, e_0\in p^{-1}(b_0), e_0'\in(p')^{-1}(b_0)$。则存在唯一的映射$f:(E,e_0)\to(E',e_0')$，使得$p=p'f$，且$E$就$f$而言是$E'$的复叠空间。

证明 由定理5.10，因$p_*\pi_1(E)=0$，对复叠投射$p':E'\to B$，映射p有升腾映射$f:(E,e_0)\to(E',e_0')$，即使得$p'f=p$。

现在证明E就f而言是E'上的复叠空间。事实上，因E'是路径连通的，对任意$e'\in E'$，有映射$g':(I,(0),(1))\to(E',e_0',e')$；对于$p'g':I\to B$，由于$p$是复叠映射，存在映射$g:(I,(0))\to(E,e_0)$，使得$pg=p'g'$，记$g(1)=e$。则依$f$的定义（见定理5.10的证明的充分性部份），$f(e)=e'$。故$f$是在上的。

其次，根据定理5.4，对任意$b\in B$，B中有b的连通邻域U_b，具有性质：

(i) $p^{-1}(U_b)=\bigcup\limits_{x\in p^{-1}(b)}V_x$，$V_x$是$x$在$E$中的连通邻域，且当$x_1\neq x_2$，$p(x_1)=p(x_2)$时，$V_{x_1}\cap V_{x_2}=\varnothing$。

(ii) $p'^{-1}(U_b)=\bigcup\limits_{x'\in p'^{-1}(b)}V'_{x'}$，$V'_{x'}$是$x'$在$E'$中的连通邻域，且当$x_1'\neq x_2'$，$p'(x_1')=p'(x_2')$时，$V'_{x_1'}\cap V'_{x_2'}=\varnothing$。

(iii) p与p'分别将每一个V_x及$V'_{x'}$同胚映射至U_b上，由B的局部路径连通性，不妨设U_b是路径连通的，因而每一个V_x及$V'_{x'}$亦然。

因为$p^{-1}(U_b)=f^{-1}((p')^{-1}(U_b))$，即

$$\bigcup_{x\in p^{-1}(b)}V_x=\bigcup_{x'\in p'^{-1}(b)}f^{-1}(V'_{x'}),$$

于是由性质(i)—(iii)知，对于$x'\in p'^{-1}(b)$，有

$$f^{-1}(V_{x'})=\bigcup_{x\in f^{-1}(x')}V_x.$$

故根据定理5.4，f是复叠投射。

f的唯一性见定理5.10后的附记。】

推论6.4 设B是连通且局部路径连通空间，E与E'分别是就映射$p:E\to B$，$p':E'\to B$而言B的万有复叠空间。则存在（在上）同胚映射$f:E\to E'$，使得$p=p'f$。

证明 取$b_0\in B, e_0\in p^{-1}(b_0), e'_0\in(p')^{-1}(b_0)$。由定理6.3，有（在上）映射$f:E\to E'$及$f':E'\to E$，使得$p=p'f$，$f(e_0)=e'_0$及$p'=pf'$，$f'(e'_0)=e_0$。从而$p=p(f'f)$，$f'f(e_0)=e_0$及$p'=p'(ff')$，$ff'(e'_0)=e'_0$。根据定理6.3的唯一性部份，有$f'f=1$（恒同）$:E\to E$，$ff'=1$（恒同）$:E'\to E'$。故$f$是（在上）同胚映射。】

附记 本推论说明，在拓扑意义下，B上的万有复叠空间是唯一的。

§7 映射空间

构造复叠空间E时，我们的出发点是路径的集合Ω。这种以映射为元素的集合组成的拓扑空间，在分析拓扑与泛函分析中很早就受到注意。本节就介绍一般的映射空间性质，为下节叙述路径空间与迴路空间作准备。它们是纤维空间的重要例子，但一般地不再是局部笛卡儿积式的。

先作一点予备。

定义7.1 拓扑空间X称为局部紧致的，如果对任意$x\in X$，X中存在包含x的开集V_x，使得$\overline{V}_x$是紧致的。

显然，紧致空间局部紧致的。

引理7.1 局部紧致空间的闭子集是局部紧致的。

证明 设A是局部紧致空间X的闭子集。对$x\in A$，因X中有包含x的开集V_x，而$\overline{V}_x$是紧致的，知$V_x\cap A$是A的（相对）开集，且$\overline{V_x\cap A}\subset\overline{V}_x$是紧致闭集。故$A$是局部紧致的。】

引理7.2 设X是局部紧致的正则空间，则对任意$x\in X$及包含x的任意开集U，都存在x的邻域V，使$\bar{V}$是紧致的，且$\bar{V}\subset U$。

证明 根据正则性质及定义7.1即得到。】

现在，设Y是一个非空集合，$\mathscr{C}$是Y中某些子集作成的集合族，且$Y\in\mathscr{C}$。记$T_0(\mathscr{C})$是由一切$\mathscr{C}$中有限个元素的交集作成的集合族，$T(\mathscr{C})$是由一切$T_0(\mathscr{C})$中任意个元素的并集作成的集合族。容易验证$T(\mathscr{C})$是Y上的一个拓扑。设拓扑空间Y，其拓扑$\mathscr{G}=T(\mathscr{C})$，则$\mathscr{C}$称为$\mathscr{G}$的（或$Y$的）子基。

引理7.3 设$\mathscr{C}$是拓扑空间Y的子基；X是拓扑空间；$f:X\to Y$为单值对应。则f是连续映射，当且仅当对任意$x\in X$及任意包含$f(x)$的$U\in\mathscr{C}$，存在x在X中的邻域V，使得$f(V)\subset U$。

证明是显然的。】

定理7.2 设X与Y是拓扑空间，则记

$\Gamma=Y^X=\{f:X\to Y|\ f$是映射$\}$；

$M(K,W)=\{f\in\Gamma|f(K)\subseteq W,K$是$X$中紧致集，$W$是$Y$中开集$\}$。

命$\mathscr{C}$为一切这样的Γ子集$M(K,W)$作成的集合族，显然$\Gamma\in\mathscr{C}$（如取$W=Y,K$为空集）。

定义Γ是以$\mathscr{C}$为子基的拓扑空间，称为（X到Y的）**映射空间**，此种拓扑称为**紧致开拓扑**，简称**Co-拓扑**。

附记 映射集Γ上拓扑的取法不一，此种Co-拓扑最初由R. H. Fox引入。

现在，记$\chi:X\times\Gamma\to Y$是由$\chi=(x,f)=f(x)$给出的单值对应，称为**赋值函数**。

命题7.4 设X是局部紧致的正则空间，则χ是连续映射。

证明 设$x\in X,f\in\Gamma,W$是Y中包含$f(x)$的开集。由f的连续性，$f^{-1}(W)$是X中包含x的开集。根据引理7.2，存在包含

x 的开集V_x，使得$\bar{V}_x\subset f^{-1}(W)$，且$\bar{V}_x$是紧致集。于是$\Gamma$中有子基开集$M(\bar{V}_x, W)$，使得$\chi(V_x, M(\bar{V}_x, W))\subset W$。故$\chi$是连续的。】

此时，称χ为**赋值映射**。

对于$y\in Y$，记$\mu_y: X\to Y$为常值映射，使得$\mu_y(X)=y$。令$\lambda: Y\to\Gamma$，使得$\lambda(y)=\mu_y$，$y\in Y$。又令$\tilde{p}_a:\Gamma\to Y, a\in X$，使得$\tilde{p}_a(f)=f(a)$，$f\in\Gamma$。容易验证$\lambda$，$\tilde{p}_a$均为连续映射，分别称为$Y$到$\Gamma$的自然内射及$\Gamma$到$Y$上的投射。

命题7.5　自然内射λ将Y同胚映射至$\lambda(Y)$上，且$\lambda(Y)$是Γ的收缩核。

证明　取$a\in X$，知$\tilde{p}_a\lambda=1$（恒同）：$Y\to Y$及$\lambda\tilde{p}_a|\lambda(Y)=1$（恒同）：$\lambda(Y)\to\lambda(Y)$。故$\lambda$是在中同胚，且映射$\lambda\tilde{p}_a:\Gamma\to\lambda(Y)$是收缩映射。】

设X, Y与Z是拓扑空间。记$\omega: Y^{X\times Z}\to(Y^X)^Z$为自然函数，即对$\varphi\in Y^{X\times Z}$，有$\omega(\varphi): Z\to\Gamma$，使得$(\omega(\varphi)(z))(x)=\varphi(x,z)$，$z\in Z$，$x\in X$。可以验证：

(i) $\omega(\varphi)\in\Gamma^Z=(Y^X)^Z$。事实上，设$M=M(K,W)$是$\Gamma$的子基开集.对任意$z_0\in(\omega(\varphi))^{-1}(M)$，知$K\times(z_0)\subset\varphi^{-1}(W)$.由$\varphi$的连续性，有$\varphi^{-1}(W)=\bigcup_\alpha X_\alpha\times Z_\alpha$,其中$X_\alpha$与$Z_\alpha$分别是$X$与$Z$的开集。根据$K$的紧致性，可设对有限个$\alpha=1,2,3,\cdots n$，有$K\times(z_0)\subset\bigcup_{\alpha=1}^{u}X_\alpha\times Z_\alpha$。而$z_0\in\bigcap_{\alpha=1}^{n}Z_\alpha\subset(\omega(\varphi))^{-1}(M)$，即$(\omega(\varphi))^{-1}(M)$是$Z$的开集。故$\omega(\varphi)$是连续的。

(ii) ω是单的。事实上，设φ与$\varphi'\in Y^{X\times Z}$，使$\omega(\varphi)=\omega(\varphi')$，则对任意$(x,z)\in X\times Z$，有

$$\varphi(x,z)=(\omega(\varphi)(z))(x)=(\omega(\varphi')(z))(x)=\varphi'(x,z)。$$

(iii) 当X是局部紧致的正则空间，ω是在上的，即为一一对应。事实上，由命题7.4，$\chi: X\times\Gamma\to Y$是连续的。对于$\psi\in(Y^X)^Z$，即$\psi: Z\to\Gamma$为映射。记$\varphi: X\times Z\to Y$为映射，使得对于$(x,z)\in X\times Z$，

有 $\varphi(x,z)=\chi(x,\psi(z))$，则$\omega(\varphi)=\psi$。】

附记 当Z是T_2空间，X是局部紧致的正则空间，可以证明ω是（在上）同胚映射。即ω与ω^{-1}均为连续映射。此时，$\omega: Y^{X\times Z}\cong(Y^X)^Z$，这个结果通常称为“指数律”，因以后我们不引用，证明从略。

命题7.6 设X是局部紧致的正则空间，且X可缩成一点a (rel. a)。则对任意$A\subset Y$，$\lambda(A)\subset\tilde{p}_a^{-1}(A)$，且$\lambda(A)$是$\tilde{p}_a^{-1}(A)$的强形变收缩核。

证明 设$H: X\times I\to X$是收缩同伦映射，即对于$x\in X$有$H(x,0)=x$，$H(x,1)=a$，及对于$t\in I$有$H(a,t)=a$。令$\widetilde{H}: X\times(I\times\Gamma)=(X\times I)\times\Gamma\to Y$为映射，使得

$$\widetilde{H}(x,t,f)=\chi(H(x,t),f),\qquad (x,t,f)\in X\times I\times\Gamma,$$

其中χ为赋值映射。命

$$H_{\#}: I\times\Gamma\to\Gamma,$$

使得

$$H_{\#}=\omega(\widetilde{H})\in(\Gamma)^{I\times\Gamma}.$$

可以验证：

(i) $H_{\#}(0,f)=f$。

(ii) $H_{\#}(1,f)=\lambda\tilde{p}_a(f)\in\lambda(Y)$。

(iii) $H_{\#}(t,\mu_y)=\mu_y$。

(iv) $\lambda(A)=\tilde{p}_a^{-1}(A)\cap\lambda(Y)$。

(v) 如$(t,f)\in I\times\tilde{p}_a^{-1}(A)$，则$H_{\#}(t,f)\in\tilde{p}_a^{-1}(A)$。

事实上，根据定义（i）—（iii）是显然成立的。

对于（iv），易见$\lambda(A)\subset\tilde{p}_a^{-1}(A)\cap\lambda(Y)$。设$f\in\tilde{p}_a^{-1}(A)\cap\lambda(Y)$，知$\tilde{p}_a(f)\in A$，且$f=\mu_y$，即$y\in A$，$f\in\lambda(A)$。所以（iv）亦成立。

对于（v），设$f\in\tilde{p}_a^{-1}(A)$，知

$$(H_{\#}(t,f))(a)=\chi(H(a,t),f)=f(H(a,t))=f(a)\in A,$$

故 $H_{\#}(t,f)\in\tilde{p}_a^{-1}(A)$。即 (v) 成立。

由 (i) — (v) 即得本命题。】

推论7.7 假设同命题7.6，则对任一点$y\in Y$，$\lambda(y)\in\tilde{p}_a^{-1}(y)$，且$\tilde{p}_a^{-1}(y)$ 在自身内可收缩成一点 $\lambda(y)(\text{rel}.\lambda(y))$。

证明 只须在命题7.6中取 $A=\{y\}$。】

现在，设X'是X的子集，并记映射空间$\Gamma'=Y^{X'}$。命$p:\Gamma\to\Gamma'$，使得对于$f\in\Gamma$，有 $p(f)=f|X':X'\to Y$。显然 p 是单值的，且根据 Γ与 Γ'的Co-拓扑，p 是连续映射。

定理7.8 设X是局部紧致的正则空间，X' 是X的闭子集，Γ,Γ'与p 如前所述．且设(X,X')于Y具有性质：对任意单形σ，任意一个映射：$S_\sigma\to Y$ 都可扩充为映射：$T_\sigma\to Y$，其中

$$S_\sigma=(X'\times\sigma\times I)\cup(X\times\sigma\times(0))\subset T_\sigma=X\times\sigma\times I.$$

则 p 是纤维映射．此性质记为（*）．

证明 对任意单形σ，设$h:\sigma\to\Gamma$及 $F:\sigma\times I\to\Gamma'$为映射，使得对于$u\in\sigma$，有$F(u,0)=ph(u)$。因$X$及$X'$都是局部紧致的正则空间，如命$\tilde{F}=\omega^{-1}(F):X'\times(\sigma\times I)\to Y$，其中$\omega:Y^{X'\times(\sigma\times I)}\to\Gamma'^{\sigma\times I}$是自然对应；及 $\tilde{h}=\omega^{-1}(h):X\times\sigma\to Y$，其中$\omega:Y^{X\times\sigma}\to\Gamma^\sigma$ 为自然对应．知$\tilde{F}$与 $\tilde{h}$ 为映射．

定义 $\widetilde{H}_0:S_\sigma\to Y$，使得

$$\widetilde{H}_0(x,u,t)=\begin{cases}\tilde{F}(x,u,t), & x\in X',u\in\sigma,t\in I,\\ \tilde{h}(x,u), & x\in X,u\in\sigma,t=0.\end{cases}$$

因对于$x\in X'$，$u\in\sigma$，$t=0$，有

$$\tilde{F}(x,u,o)=F(u,o)(x)=ph(u)(x)=(h(u))(x)=\tilde{h}(x,u).$$

根据引理Ⅰ.1.2（粘接引理），$\widetilde{H}_0$ 是连续映射．

根据假设条件，(X,X') 具有性质（*），于是 $\widetilde{H}_0$ 可扩充至映射$\widetilde{H}:T_\sigma\to Y$。命 $H=\omega(\widetilde{H}):\sigma\times I\to\Gamma$，其中 $\omega:Y^{X\times(\sigma\times I)}\to\Gamma^{\sigma\times I}$是自然对应，知$H$是连续的．容易验证 $pH=F$及对于$u\in\sigma$，

有$H(u,0)=h(u)$。故p对σ具有CHP。根据定理1.2条件（ii），p是纤维映射。】

附记 明显地，当(X,X')是有限(单纯)复形偶时，定理中的性质（*）是适合的。这是我们常见的和下面要用到的情形。

§8 路径空间与迴路空间

现在考虑一类特殊的映射空间。

设Y是路径连通空间。记

$$\Omega=Y^I=\{f:I\to Y\,|\,f\text{是映射}\}$$

具有Co-拓扑。令$\rho:\Omega\to Y\times Y$，使得$\rho(f)=(f(0),f(1))$，ρ是连续映射。事实上，设$f\in\Omega$，对$f(0)$与$f(1)$的邻域W_0与W_1，有Ω中包含f的基开集$M=M(\{0\},W_0)\cap M(\{1\},W_1)$，而$\rho(M)\subset W_0\times W_1$。

设A与B是Y的子集。记$\Omega_{AB}=\{f\in\Omega\,|\,f(0)\in A,f(1)\in B\}$及$\rho_{AB}=\rho|\Omega_{AB}:\Omega_{AB}\to A\times B$。

命题8.1 上述映射ρ与ρ_{AB}是纤维映射。

证明 因为I是局部紧致的正则空间，$\{0,1\}$是I的闭子集，且$(I,\{0,1\})$具有定理7.8中的性质（*），因之$p:\Omega\to Y^{\{0,1\}}$是纤维映射，其中$p(f)=f|\{0,1\}$。命$\tau:Y^{\{0,1\}}\to Y\times Y$为下式给出的（在上）同胚映射

$$\tau(g)=(g(0),g(1)),\qquad g\in Y^{\{0,1\}}.$$

故$\rho=\tau p$是纤维映射。

其次，对任意单形σ，因映射ρ具有CHP，自然ρ_{AB}亦具有同一个性质，即ρ_{AB}是纤维映射。】

定义8.1 设Y是路径连通空间。对于$y\in Y$，简记$\Omega_y=\Omega_{yY}$，$\Lambda_y=\Omega_{yy}$，分别称为(以y为起点的)Y上的**路径空间**和**迴路空间**。

记$e_y\in\Lambda_y$为常值映射，使得$e_y(I)=y$。

定理8.2　设Y是路径连通空间，命$p_y=\tilde{p}_1|\Omega_y\to Y$，其中$\tilde{p}_1:\Omega=Y^I\to Y$的定义见§7。则

（i）p_y是纤维映射；

（ii）Ω_y可缩成一点e_y；

（iii）$\pi_q(Y,\ y)\approx\pi_{q-1}(\Lambda_y,\ e_y)$，$q\geqslant 2$；

（iv）Λ_y是路径连通的，当且仅当Y是单连通的。

证明　对于（i），易见$p_y=j\rho_{yY}$，其中$j:\{y\}\times Y\to Y$为（在上）同胚映射，使得$j(y,\ y')=y',y'\in Y$。根据命题8.1，p_y是纤维映射。且$y\in Y$上的纤维即迴路空间Λ_y。

对于（ii），因I可缩成一点$O\in I(\mathrm{rel}.\ O)$，$\Omega_y=p_0^{-1}(y)$。由推论7.7立即得到。

对于（iii），根据（ii）有$\pi_q(\Omega_y,\ e_y)=0$，$q\geqslant 1$。利用命题3.3即得到。

对于（iv），设$f:(I,\ \partial I)\to(Y,\ y)$为映射，即$f\in\Lambda_y$。设$\Lambda_y$是路径连通的，有映射

$$\varphi:(I,(0),(1))\to(\Lambda_y,f,e_y).$$

命$H=\omega^{-1}(\varphi):I\times I\to Y$，其中$\omega:Y^{I\times I}\to(X^I)^I$为自然的一一对应，易见

$$H(x,\ 0)=f(x),\ x\in I;\qquad H(x,\ 1)=y,\ x\in I;$$

及$H(0,\ t)=y=H(1,\ t)$，$t\in I$。故

$$f\simeq e_y:(I,\ \partial I)\to(Y,\ y),$$

即Y是单连通的。

反之，设$f\in\Lambda_y$,从$\pi_1(Y,y)=0$，有同伦映射$H:I\times I\to Y$，使得

$$H(x,\ 0)=f(x),\ x\in I;\qquad H(x,\ 1)=y,\ x\in I;$$

及$H(0,\ t)=H(1,\ t)=y$，$t\in I$。

命$\varphi=\omega(H):I\to\Omega$，易见

$$\varphi(t)(0)=y=\varphi(t)(1).$$

即$\varphi(I)\subset\Lambda_y$，且$\varphi(0)=f$，$\varphi(1)=e_y$。∎

大家记得，路径空间 Y 上的基本群 $\pi_1(Y, y)$ 是一切映射 f: $(I, \partial I)\to(Y, y)$ 按（相对）同伦关系分成的同伦类集合，群的运算——乘法是由映射的“乘法”决定的（见Ⅰ. §2），而 Λ_y 正是由这样的一切映射组成的拓扑空间，可见在 Λ_y 中有一个自然的乘法运算.

定义8.2　设 Y 是路径连通空间，$y\in Y$。命

$$\eta:\Lambda_y\times\Lambda_y\to\Lambda_y,$$

使得对于 $(f, g)\in\Lambda_y\times\Lambda_y$，有

$$(\eta(f, g))(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

由此可知 $\eta(f,g)\in\Lambda_y$。此时，η 称为迴路空间 Λ_y 上的乘法运算，通常简记 $f\cdot g=\eta(f, g)$。

定理8.3　设 η 是 Λ_y 上的乘法运算（如前所述），$e_y\in\Lambda_y$ 是常值映射，则

（i）η 是连续的；

（ii）记 $\gamma_\#$ 与 $\xi_\#: \Lambda y\to\Lambda y$ 为对应，使得对于 $f\in\Lambda_y$，有 $\gamma_\#(f)=f\cdot e_y$，$\xi_\#(f)=e_y\cdot f$，那么

$$\gamma_\#\simeq 1(\text{恒同}):(\Lambda_y, e_y)\to(\Lambda_y, e_y),$$

$$\xi_\#\simeq 1(\text{恒同}):(\Lambda_y, e_y)\to(\Lambda_y, e_y).$$

证明　对于（i），取 $M=M(K, W)\cap\Lambda_y$，其中 $M(K,W)$ 是 Γ 的子基开集. 即 K 是 I 的紧致集，W 是 Y 的开集.

记　$\theta_1:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to I$，$\theta_2:\left[\frac{1}{2},1\right]\to I$ 是由 $\theta_1(t)=2t$, $\theta_2(t)=2t-1$ 定义的映射. 记

$$K_1=\theta_1\left(K\cap\left[0,\frac{1}{2}\right]\right),\ K_2=\theta_2\left(K\cap\left[\frac{1}{2},1\right]\right),$$

知 K_1 与 K_2 是 I 的紧致集。命

$$F_1=M(K_1, W)\cap\Lambda_y,\qquad F_2=M(K_2, W)\cap\Lambda_y.$$

易见$\eta^{-1}(M)=F_1\times F_2$是$\Lambda_y\times\Lambda_y$的开集，即$\eta$是连续的.

对于（ii），显然有$\gamma_\#(e_y)=\eta(e_y, e_y)=e_y$.

记 $\Theta:I\times I\to I$为映射，使得$\Theta(t, s)=(1-s)t+\frac{1}{2}st$. 知

$\Theta(t, 0)=t$, $\Theta(t, 1)=\frac{1}{2}t=\theta_1^{-1}(t)$，而$\theta_1$的意义见（i）.

命

$$\tilde{\Phi}:I\times(I\times\Lambda y)=(I\times I)\times\Lambda_y\to Y$$

是由

$$\widetilde{\Phi}(t, s, f)=\chi(\Theta(t, s), f)$$

给出的映射，其中$\chi:I\times\Lambda_y\to Y$为赋值映射（指$\chi:I\times\Omega\to Y$限制在$I\times\Lambda_y$上）. 又命

$$\Phi=\omega(\widetilde{\Phi}):I\times\Lambda_y\to Y^I,$$

其中$\omega:Y^{I\times(I\times\Lambda_y)}\to(Y^I)^{I\times\Lambda_y}$为自然一一对应（见§7）.

易见，对于$f\in\Lambda_y$有$\Phi(0, f)=f$, $\Phi(1, f)=f\theta_1^{-1}$及$\Phi(s,e_y)=e_y$. 进而，如$f=f'\cdot e_y$, $f'\in\Lambda_y$，则$\Phi(s,f)\in\Lambda_y$. 事实上，

$$(\Phi(s, f))(0)=\chi(\Theta(0, s), f)=f(0)=y,$$

$$(\Phi(s, f))(1)=\chi(\Theta(1, s), f'\cdot e_y)$$

$$=(f'\cdot e_y)\left(1-\frac{s}{2}\right)=y.$$

现在定义$H:\Lambda_y\times I\to\Lambda_y$是由下式给出的映射，对于$(f, s)\in\Lambda_y\times I$，有$H(f, s)=\Phi(s, f\cdot e_y)$. 可见

$$H(f, 0)=\gamma_\#(f),\ H(f, 1)=(f\cdot e_y)\theta_1^{-1}=f,$$

$$H(e_y, s)=e_y.$$

即

$$\gamma_\#\simeq 1(\text{恒同}):(\Lambda_y, e_y)\to(\Lambda_y, e_y).$$

同理可证 $\xi_\#\simeq 1(\text{恒同}):(\Lambda_y, e_y)\to(\Lambda_y, e_y)$. ▌

附记　定理表明迴路空间中常值映射e_y对上述连续的乘法起“同伦单位元”的作用。一般地具有这种运算的拓扑空间称为H-空间。

定义8.3　设X是拓扑空间，$x_0\in X$，且X上定义有(单值)乘法运算$\eta: X\times X\to X$。记$\gamma_\#$与$\xi_\#: X\to X$，使得$\gamma_\#(x)=\eta(x, x_0)$，$\xi_\#(x)=\eta(x_0, x)$。$(X, x_0)$称为对$\eta$而言的**H-空间**（即Hopf空间），如果

（i）η是连续的；

(ii)　$\gamma_\#\simeq 1$（恒同）$:(X, x_0)\to(X, x_0)$，

$\xi_\#\simeq 1$（恒同）$:(X, x_0)\to(X, x_0)$。

例8.1　设Λ_y是Y上对y的迴路空间，则(Λ_y, e_y)是H-空间。

例8.2　$(S^1, 1)$是H-空间。事实上，令

$$S^1=\{z\in C\,|\,|z|=1,\ C\text{复数域}\},$$

取复数乘法为η。此时$\xi_\#$，$\gamma_\#: S^1\to S^1$是恒同映射，易见适合定义8.3。

例8.3　设X是拓扑群，即X既是一个拓扑空间，又是一个(乘法)群。如果由$(x, x')\to x(x')^{-1}$规定的对应$X\times X\to X$是连续映射，此时(X, x_0)对群的乘法是H-空间，其中x_0是群X的单位元。

附记　与群的定义比较，一个H-空间(X, x_0)称为一个**H-群**，如果除了适合(i)与(ii)外，还适合下面的(iii)和(iv)。

(iii) 图表

$$\begin{array}{ccc} X\times X\times X & \xrightarrow{\eta\times 1} & X\times X \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ X\times X & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

是同伦交换的（同伦结合律）。即

$$\eta\cdot\eta\times 1\simeq\eta\cdot 1\times\eta: X\times X\times X\to X\ (\text{rel.}(x_0,\ x_0,\ x_0)),$$

其中

$$\eta\times 1(x,\ x',\ x'')=(\eta(x,\ x'),\ x''),$$
$$1\times\eta(x,\ x',\ x'')=(x,\ \eta(x',\ x'')),$$

"•"代表映射合成。

(iv) 记 $c_{x_0}: X\to X$，使得 $c_{x_0}(X)=x_0$。存在映射 $\beta:(X,\ x_0)\to(X,\ x_0)$，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{(\beta,1)} & X\times X & \xrightarrow{(1,\beta)} & X \\ & {\scriptstyle c_{x_0}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\eta} & \swarrow{\scriptstyle c_{x_0}} & \\ & & X & & \end{array}$$

是同伦交换的（β 称为同伦逆）。即

$$\eta\cdot(\beta,\ 1)\simeq c_{x_0}:(X,\ x_0)\to(X,\ x_0),$$
$$\eta\cdot(1,\ \beta)\simeq c_{x_0}:(X,\ x_0)\to(X,\ x_0).$$

命题8.4 设 $(X,\ x_0)$ 是路径连通的 H-空间，则对任意 $n\geqslant 1$，X 是n-单式的。

证明 根据定义Ⅰ.4.3，设 $F: S^n\times(0)\cup(p_0)\times I\to X$ 为映射，使得 $F(p_0,\ 0)=F(p_0,\ 1)=x_0$。令 $H: S^n\times I\to X$ 是由

$$H(u,\ t)=\eta(F(u,\ 0),\ F(p_0,\ t)),\qquad (u,\ t)\in S^n\times I$$

定义的映射。易见

$$H|(p_0)\times I\simeq F|(p_0)\times I\ \ (\text{rel.}x_0),$$
$$H|S^n\times(1)=H|S^n\times(0)\simeq F|S^n\times(0)\ \ (\text{rel.}x_0).$$

故 $\pi_1(X,\ x_0)$ 中每一个元素在 $\pi_n(X,x_0)$ 上导出恒同同构。▌

推论8.5 设 $\hat{\Lambda}_y$ 是迴路空间 Λ_y 中包含 e_y 的路径连通分支，则 $\hat{\Lambda}_y$ 是 n-单式的 $(n\geqslant 1)$。特别地，$\pi_1(\hat{\Lambda}_y,\ e_y)$ 是交换的。

证明 因 $(\Lambda_y,\ e_y)$ 是 H-空间，而 $\hat{\Lambda}_y\times\hat{\Lambda}_y$ 是路径连通的，由

$$\eta(e_y,\ e_y)=e_y\in\hat{\Lambda}_y,$$

知 $\eta(\hat{\Lambda}\times\hat{\Lambda}_y)\subset\hat{\Lambda}_y$。故 $\hat{\Lambda}_y$ 对 $\eta|\hat{\Lambda}_y\times\hat{\Lambda}_y$ 是 H-空间，根据命题8.4即得推论。】

练　习　Ⅳ

1．设 $p:S^n\to B$ 是纤维映射，B 是多于一点的路径连通空间。证明 p 不是零伦。

2．设 $p:E^1\to S^1$ 是指数映射，证明

（i）对任意空间 X，映射 $g:X\to S^1$ 能升腾到映射 $f:X\to E^1$，使得 $pf=g$，当且仅当 g 是零伦的；

（ii）设 X 是单连通且局部路径连通空间，则任意映射 $g:X\to S^1$ 是零伦的。

3．设 P^n 是 n 维（实）射影空间，$n\geqslant 2$，则任意映射 $g:P^n\to S^1$ 是零伦的。

4．试证明：不存在映射 $f:S^n\to S^1$，$n\geqslant 2$，使得

$$f(-x)=-f(x).$$

5．设 $p:E\to B$ 是纤维映射，$A\subset B$，则 $p|p^{-1}(A):p^{-1}(A)\to A$ 是纤维映射。

6．设 $p:E^n\longrightarrow\underbrace{S^1\times S^1\times\cdots\times S^1}_{n}$，$n\geqslant 2$ 正整数，使得

$$p(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)=(e^{2\pi iu_1},\ e^{2\pi iu_2},\ \cdots,\ e^{2\pi iu_n}).$$

证明 p 是复叠映射。

7．记 $S^1\vee S^1=\{(z,\ z_2)\in S^1\times S^1|\,z_1=1$ 或 $z_2=1\}$ 及 $E=\{(u_1,u_2)\in E^2|\,u_1$ 或 u_2 是整数$\}$。命 $p:E\to S^1\vee S^1$，使得 $p(u_1,u_2)=(e^{2\pi iu_1},\ e^{2\pi iu_2})$。证明 p 是复叠映射。

8．设 B 是半局部单连通空间，$p:E\to B$ 是复叠投射。如果 $\tilde{p}:\tilde{E}\to E$ 是复叠投射，证明 $p\cdot\tilde{p}:\tilde{E}\to B$ 是复叠投射。

9．设 B 是连通且局部路径连通和半局部单连通空间，E 是 B 的万有复叠空间。证明 $\pi_2(B)\approx H_2(E)$。

10．设 B 是半局部单连通空间；E 与 E' 分别就映射 $p:E\to B$，

$p':E'\to B$ 而言是B的复叠空间。取 $b_0\in B$; $e_0\in p^{-1}(b_0)$, $e_0'\in(p')^{-1}(b_0)$。并设 $p_*\pi_1(E,e_0)=p'_*\pi_1(E',e_0)$。证明存在（在上）同胚映射$f:E\to E'$，使$p'f=p$。

11. 设Y是连通且局部路径连通空间，证明 $p:\Omega_y\to Y$是开映射(p_y 意义见定理 8.2)。

12. 设X是路径连通的H-空间，$x_0\in X$，对于 $\alpha\in\pi_p(X, x_0)$, $\beta\in\pi_q(X, x_0)$, p 与 $q>1$，证明

$$[\alpha, \beta]=0$$

(其中 Whitehead 积[ ]定义见Ⅱ.§10)。并由此可证明命题 8.4。

13. 证明迴路空间Λ_y 是H-群。

第五章　谱叙列的代数理论

〔**内容提要**〕

谱叙列的概念由 J.Leray 于1946年首次提出，后经 J.-P. Serre 与 W.S.Massey 等人研究.现已在代数拓扑的许多重要问题中找到它的应用.本章简要叙述谱叙列与正合偶(后者是W.S. Massey 于1952年提出的[25]）等理论中的若干概念和性质，为下一章运用到纤维空间上，并进而为计算球的部份同伦群作一些代数的准备.主要概念依次有：导算子群、单梯群、双梯群、正合偶、导来正合偶、谱叙列、升标 d-群以及与升标 d-群相联系的正合偶等.

§1　导算子群

定理1.1　设 A 是一个交换群.同态 $d:A\to A$ 称为 A 上的**导算子**，如果 $d^2=0$.即对任意 $a\in A$，$d(d(a))=0$.具有导算子 d 的群 A 简称为 **d-群**.

设 A 是 d-群，记 $\mathscr{B}(A)=\mathrm{Im}_A(d)$，$\mathscr{Z}(A)=\ker_A(d)$.因 $d^2=0$，知 $\mathscr{B}(A)\subseteq\mathscr{Z}(A)$.命

$$\mathscr{H}(A)=\frac{\mathscr{Z}(A)}{\mathscr{B}(A)},$$

称为 d-群 A 的**导来群**（同调群）.

设 A 为 d-群，B 为 d'-群，$f:A\to B$ 是群同态，且 $d'\cdot f=f\cdot d$.即图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{d'} & B \end{array}$$

是交换的。于是，因 $f(\mathscr{B}(A))\subseteq\mathscr{B}(B)$，$f(\mathscr{Z}(A))\subseteq\mathscr{Z}(B)$，$f$ 导出同态 $\mathscr{H}(f):\mathscr{H}(A)\to\mathscr{H}(B)$。

例1.1 设 $1_A:A\to A$ 为恒同同态，A 是 d-群。易见 1_A 的导出同态 $\mathscr{H}(1_A):\mathscr{H}(A)\to\mathscr{H}(A)$ 亦是恒同同态。

例1.2 设 A，B 与 C 分别是 d-群，d'-群与 d''-群。又设 $f:A\to B$，$g:B\to C$ 为同态，使得

$$d'\cdot f=f\cdot d,\qquad d''\cdot g=g\cdot d'.$$

易见同态 $g\cdot f:A\to C$ 适合

$$d''\cdot(g\cdot f)=(g\cdot f)\cdot d,$$

且

$$\mathscr{H}(g\cdot f)=\mathscr{H}(g)\cdot\mathscr{H}(f):\mathscr{H}(A)\to\mathscr{H}(C).$$

定义1.2 设 A 与 B 分别为 d-群和 d'-群，f 与 $g:A\to B$ 均为同态，使得

$$d'\cdot f=f\cdot d,\qquad d'\cdot g=g\cdot d.$$

则 f 与 g 称为是同伦的，如果存在一个同态 $\xi:A\to B$，使得 $f-g=\xi\cdot d+d'\cdot\xi$。此时，记 $f\simeq g$。显然，“$\simeq$”是一个等价关系。

命题1.1 设 A 与 B 分别是 d-群和 d'-群。f 与 $g:A\to B$ 为同态，使得

$$d'\cdot f=f\cdot d,\qquad d'\cdot g=g\cdot d.$$

且设 $f\simeq g$。则 $\mathscr{H}(f)=\mathscr{H}(g):\mathscr{H}(A)\to\mathscr{H}(B)$。

证明是显然的。】

设 A 是 d-群 B 的子群，且 $d(A)\subseteq A$，于是 $d|A$ 即为 A 的导算子，而在商群 $C=B/A$ 上导出一个导算子 d^* 为：对于 $[b]\in C$，其中 $[b]$ 表示对 A 而言 $b\in B$ 所在陪集。命 $d^*([b])=[db]$。易见 d^* 的定义是一意的。

记 $i:A\to B$ 为包含映射，$j:B\to C$ 为自然投射。有正合叙列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\ i\ }B\xrightarrow{\ j\ }C\longrightarrow 0,$$

且 $i\cdot d|A=d\cdot i$，$j\cdot d=d^*\cdot i$，故有同态

$$\mathscr{H}(i):\mathscr{H}(A)\to\mathscr{H}(B),\qquad \mathscr{H}(j):\mathscr{H}(B)\to\mathscr{H}(C).$$

此外，定义自然同态 $\partial:\mathscr{H}(C)\to\mathscr{H}(A)$为：对$\{[b]\}\in\mathscr{H}(C)$，其中 $[b]\in\mathscr{Z}(C)$，$\{[b]\}$ 表示对 $\mathscr{B}(C)$而言$[b]$所在的陪集．因 $[db]=d^*[b]=0\in C$，知 $db\in A$，且 $db\in\mathscr{Z}(A)$。命

$$\partial\{[b]\}=\{db\}\in\mathscr{H}(A),$$

其中$\{db\}$表示对 $\mathscr{B}(A)$而言 db 所在的陪集。易见 ∂ 的定义是一意的。

命题1.2　设叙列 $0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{j}C\to 0$，同态 $\mathscr{H}(i)$，$\mathscr{H}(j)$ 和 ∂ 如上所述，则三角形

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{H}(A) & \xrightarrow{\mathscr{H}(i)} & \mathscr{H}(B)\\ & {}_{\partial}\nwarrow \quad \swarrow_{\mathscr{H}(j)} & \\ & \mathscr{H}(C) & \end{array}$$

是正合的。即每一个同态的核恰好是上一个同态的像。

证明留作练习。】

定义1.3　设A是交换群．A称为**单梯群**，或称为**有单梯构造的**，如果对每一个整数n，规定了一个A的子群A_n，且$A=\sum_n A_n$（直和）。此时，A_n 的元素称为**齐n阶的**。

设 $A=\sum_n A_n$，$B=\sum_n B_n$ 是单梯群，$f:A\to B$为同态。如果对每一个整数n，$f(A_n)\subseteq B_{n+p}$，则f称为是**齐p阶同态**。

例1.3　设X是拓扑空间，链复形$C(S(X))=\sum_n C_n(S(X))$是单梯群（自然，取 $C_n(S(X))=0$，当$n<0$）．它有导算子 $\partial:C(S(X))\to C(S(X))$，是齐$(-1)$阶同态。易见

$$\partial\text{ 的核 }\mathscr{Z}(X)=\sum_n Z_n(S(X)),$$

$$\partial\text{ 的像 }\mathscr{B}(X)=\sum_n B_n(S(X)).$$

且 $C(S(X))$的导来群为

$$\mathscr{H}(C(S(X)))=\sum_n H_n(S(X)),$$

其中 $H_n(S(X))$ 是X的n维广义下同调群，当$n<0$，

$$H_n(S(X))=0.$$

注意，仿照Ⅱ.§1的记号，广义链群、链复形与同调群等都是以整数加群J为系数群。

类似地，有

定义1.4 设A是交换群。A称为**双梯群**，或称为有**双梯构造的**，如果对每一对有序整数(m,n)，规定了一个A的子群$A_{m,n}$，且$A=\sum_{m,n}A_{m,n}$（直和）。此时$A_{m,n}$的元素称为**齐**(m,n)**阶的**。设

$$A=\sum_{m,n}A_{m,n}, \qquad B=\sum_{m,n}B_{m,n}$$

是双梯群，$f:A\to B$ 为同态。如果对每一对(m,n)有

$$f(A_{m,n})\subseteq B_{m+p,n+q},$$

则称f是**齐**(p,q)**阶同态**。

§2 正合偶与谱叙列

定义2.1 设D与E是交换群，$i:D\to D$，$j:D\to E$，$k:E\to D$为群同态，则$\mathscr{C}=\langle D,E;\ i,j,k\rangle$称为一个**正合偶**，如果在三角形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & {}_{k}\nwarrow \quad \swarrow_{j} & \\ & E & \end{array}$$

中正合性成立。

例2.1 设K是有限单纯复形，K_p是K的子复形，且适合

$$K_0\subseteq K_1\subseteq K_2\subseteq K_3\subseteq\cdots\subseteq K_r=K_{r+1}=\cdots=K,$$

$$K_{-1}=K_{-2}=\cdots=\varnothing.$$

命

$$D=\sum_p H(K_p),\qquad E=\sum_p H(K_p,\ K_{p-1}),$$

其中 $H(\cdots)=\sum_l H_l(\cdots)$，而 $H_l(\cdots)$ 是…的第 l 个整系数下同调群。

记同态 $i:D\to D$，$j:D\to E$，$k:E\to D$ 由下面同调叙列中的同态分别决定

$$\cdots\longrightarrow H_l(K_p)\xrightarrow{i}H_l(K_{p+1})\xrightarrow{j}H_l(K_{p+1},K_p)$$

$$\xrightarrow{k}H_{l-1}(K_p)\xrightarrow{i}\cdots.$$

因此，由同调叙列的正合性，知

$$\mathscr{C}=\langle D,E;\ i,j,k\rangle$$

是正合偶。通常称为K的下同调正合偶。

现在，设 $\mathscr{C}=\langle D,E;\ i,j,k\rangle$为正合偶，我们将构造一个正合偶 $\mathscr{C}'=\langle D',\ E';\ i',\ j',\ k'\rangle$如下。

首先，记 $d=j\cdot k:E\to E$，于是由 $\mathscr{C}$ 的正合性，$d^2=d\cdot d==j(kj)k=0$，即 d 为 E 上的导算子，命 $E'=\mathscr{H}(E)$。

其次，记 $D'=i(D)\subseteq D$。命 $i'=i|D':D'\to D'$。

为定义 $j:D'\to E'$，设 $x'\in D'$，选取 $x\in D$，使得 $i(x)=x'$。于是 $dj(x)=jkj(x)=0$，即 $j(x)\in\mathscr{Z}(E)$。

命

$$j'(x')=[j(x)]\in\mathscr{H}(E)=E'.$$

易见 j'的定义是一意的。事实上，如果有 $x_1\in D$，使得 $i(x_1)=x'$，由于

$$i(x-x_1)=i(x)-i(x_1)=0,$$

知有 $y\in E$，$x-x_1=k(y)$。从而

$$j(x)-j(x_1)=j(x-x_1)=jk(y)=d(y)\in\mathscr{B}(E).$$

显然 j' 是一个同态。

为定义 $k':E'\to D'$，设 $y'\in E'$，选取 $y\in\mathscr{Z}(E)$，使得 $y'=[y]$。因 $jk(y)=d(y)=0$，知 $k(y)\in i(D)=D'$。命

$$k'(y')=k(y)\in D',$$

则 k' 的定义是一意的。事实上，如果 $y\in\mathscr{B}(E)$，即 $y=d(y_1)$，$y_1\in E$，知 $k(y)=kjk(y_1)=0$。显然 k' 亦是一个同态。

现在证明在三角形

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{i'} & D' \\ & {}_{k'}\nwarrow \quad \swarrow_{j'} & \\ & E' & \end{array}$$

中正合性成立：

（1）因 $i(D')=i'(i(D))=i(i(D))$ 及 $ji(D)=0$，知

$$\mathrm{Im}(i')\subseteq\ker(j')；$$

（2）因 $kj(D)=0$，知 $\mathrm{Im}(j')\subseteq\ker(k')$；

（3）因 $ik(\mathscr{Z}(E))=0$，知 $\mathrm{Im}(k')\subseteq\ker(i')$；

（4）设 $x'\in D'$，使得 $j'(x')=0$，即对某个 $x\in D$ 有 $x'=i(x)$，及某个 $y\in E$，使得 $j(x)=d(y)=jk(y)$，于是

$$j(x-k(y))=0。知 x-k(y)\in i(D)=D',$$

且 $i(x-k(y))=x'-ik(y)=x'$，因而 $x'\in i'(D')$。故 $\ker(j')\subseteq\mathrm{Im}(i')$；

（5）设 $y'\in E'$，使得 $k'(y')=0$。即有 $y'=[y]$，$y\in\mathscr{Z}(E)$，而 $k(y)=0$。由 $y\in j(D)$，根据定义 $y'\in\mathrm{Im}(j')$，故

$$\ker(k')\subseteq\mathrm{Im}(j')；$$

（6）设 $x'\in D'$，使得 $i'(x')=0$。即有 $x\in D$，$x'=i(x)$，而 $i(i(x))=0$。由是对某个 $y\in E$，有 $i(x)=k(y)$，因 $ji=0$，知 $y\in\mathscr{Z}(E)$。因此 $x'\in\mathrm{Im}(k')$。故

$$\ker(i')\subseteq\mathrm{Im}(k')。$$

总之，$\mathscr{C}'=\langle D', E'; i', j', k'\rangle$ 是一个正合偶，称为 $\mathscr{C}$ **的导来正合偶，或第一次导来偶**。

照此方法，可用归纳法定义，$\mathscr{C}'$ 的第 n 次（$n\geqslant1$）导来偶称为 $\mathscr{C}$ 的第（$n+1$）次导来偶。从而有导来偶叙列

$$\mathscr{C}=\mathscr{C}^{(1)},\ \mathscr{C}^{(2)},\ \cdots,\ \mathscr{C}^{(n)},\ \mathscr{C}^{(n+1)},\ \cdots$$

其中

$$\mathscr{C}^{(n)}=<D^{(n)},\ E^{(n)};\ i^{(n)},\ j^{(n)},\ k^{(n)}>,$$

$$\mathscr{C}^{(n+1)}=(\mathscr{C}^{(n)})',\qquad n=1,2,\cdots.$$

该叙列有两个重要性质：

1. $\{D^{(n)}\}$是群D的“递减”子群列，即

$$D=D^{(1)}\supseteq D^{(2)}\supseteq\cdots\supseteq D^{(n)}\supseteq D^{(n+1)}\supseteq\cdots.$$

而同态$i^{(n)}:D^{(n)}\to D^{(n)}$，即是$i:D\to D$限制在$D^{(n)}$上。

2. 记$d^{(n)}=j^{(n)}\cdot k^{(n)}$，它是$E^{(n)}$上的导算子，而$E^{(n+1)}$是$d^{(n)}$-群$E^{(n)}$的导来群(同调群)，即$E^{(n+1)}=\mathscr{H}(E^{(n)})$。

定义2.2　设$\mathscr{C}=\mathscr{C}^{(1)},\ \mathscr{C}^{(2)},\ \cdots,\ \mathscr{C}^{(n)},\ \mathscr{C}^{(n+1)},\ \cdots$是导来正合偶叙列．则其中导来群的叙列

$$E=E^{(1)},\ E^{(2)},\ \cdots,\ E^{(n)},\ E^{(n+1)},\ \cdots$$

称为正合偶$\mathscr{C}$所决定的**谱叙列**。

定义2.3　设$\mathscr{C}_1=<D_1,\ E_1;\ i_1,\ j_1,\ k_1>$，$\mathscr{C}_2=<D_2,\ E_2;\ i_2,\ j_2,\ k_2>$是正合偶．$(\Phi,\Psi):\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2$称为**正合偶同态**，如果$\Phi:D_1\to D_2$，$\Psi:E_1\to E_2$是群同态，且

$$i_2\Phi=\Phi i_1,\qquad j_2\Phi=\Psi j_1,\qquad k_2\Psi=\Phi k_1.$$

于是，正合偶的同态$(\Phi,\Psi):\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2$自然导出它们的导来正合偶的同态$(\Phi',\Psi'):\mathscr{C}_1'\to\mathscr{C}_2'$如下：因

$$\Phi(D_1')=\Phi(i_1(D_1))=i_2\Phi(D_1)\subseteq i_2(D_2)=D_2',$$

命

$$\Phi'=\Phi|D_1':D_1'\to D_2'.$$

其次，若记$d_1=j_1k_1$，$d_2=j_2k_2$，知$d_2\Psi=\Psi d_1$．根据§1，Ψ导出同态$\Psi':E_1'\to E_2'$．易见，(Φ',Ψ')是导来偶的同态，并称为

是(Φ,Ψ)的**导来同态**。

照此方法，可用归纳法定义同态$(\Phi^{(n)},\Psi^{(n)}):\mathscr{C}_1^{(n)}\to\mathscr{C}_2^{(n)}$，$n=1,2,\cdots$，使得$(\Phi^{(n+1)},\ \Psi^{(n+1)})$是$(\Phi^{(n)},\ \Psi^{(n)})$的导来同态，其中$(\Phi^{(1)},\Psi^{(1)})=(\Phi,\Psi)$，$(\Phi^{(2)},\Psi^{(2)})=(\Phi',\Psi')$。

命题2.1 对于上述同态(Φ,Ψ)等，设

$$\Phi:D_1\approx D_2,\quad \Psi:E_1\approx E_2.$$

则对于$n\geqslant 2$，$\Phi^{(n)}:D_1^{(n)}\to D_2^{(n)}$及$\Psi^{(n)}:E_1^{(n)}\to E_2^{(n)}$亦都是同构。

证明 当$n=2$，根据(Φ',Ψ')的定义，命题的结论是显然的。对$n>2$，可用归纳法完成此证明。▌

在以后正合偶的应用中，通常是适合下述性质(P)的双梯正合偶：$\mathscr{C}=\langle D,E;\ i,j,k\rangle$。

(P) $\begin{cases}(1)\ D=\sum_{p,q}D_{p,q}, \qquad E=\sum_{p,q}E_{p,q};\\ (2)\ i,j,k\text{ 分别是齐}(1,-1)\text{阶，齐}(0,0)\text{阶，齐}(-1,0)\text{阶的同态。}\end{cases}$

例2.2 在例2.1中，命

$$D_{p,q}=H_{p+q}(K_p),\quad E_{p,q}=H_{p+q}(K_p,K_{p-1}).$$

知

$$D=\sum_p H(K_p)=\sum_{p,q}H_{p+q}(K_p)=\sum_{p,q}D_{p,q},$$
$$E=\sum_p H(K_p,K_{p-1})=\sum_{p,q}H_{p+q}(K_p,K_{p-1})=\sum_{p,q}E_{p,q}.$$

及

$$i(D_{p,q})=i(H_{p+q}(K_p))\subseteq H_{p+q}(K_{p+1})=D_{p+1,q-1},$$
$$j(D_{p,q})=j(H_{p+q}(K_p))\subseteq H_{p+q}(K_p,K_{p-1})=E_{p,q},$$
$$k(E_{p,q})=k(H_{p+q}(K_p,K_{p-1}))\subseteq H_{p+q-1}(K_{p-1})$$
$$=D_{p-1,q}.$$

命题2.2 设$\mathscr{C}=\langle D,E;\ i,j,k\rangle$是适合$(P)$的双梯正合

偶，则对 $\mathscr{C}$ 的各次导来偶 $\mathscr{C}^{(n)}=<D^{(n)},\ E^{(n)};\ i^{(n)},\ j^{(n)},\ k^{(n)}>$，$n\geqslant 1$，有

(i) $D^{(n)}$ 与 $E^{(n)}$ 是双梯群

$$D^{(n)}=\sum_{p,q}D^{(n)}_{p,q},\qquad E^{(n)}=\sum_{p,q}E^{(n)}_{p,q};$$

(ii) $i^{(n)}(D^{(n)}_{p,q})\subseteq D^{(n)}_{p+1,q-1}$；

(iii) $j^{(n)}(E^{(n)}_{p,g})\subseteq E^{(n)}_{p-n+1,q+n-1}$；

(iv) $k^{(n)}(E^{(n)}_{p,q})\subseteq D^{(n)}_{p-1,q}$；

(v) $d^{(n)}(E^{(n)}_{p,q})\subseteq E^{(n)}_{p-n,q+n-1}$，其中 $d^{(n)}=j^{(n)}\cdot k^{(n)}$.

证明 (v)是(iii)与(iv)的推论，以下用归纳法证(i)—(iv)．当 $n=1$，即条件 (P) 成立。

设对某个 $n\geqslant 1$，条件(P)已成立，即 $i^{(n)}$，$j^{(n)}$，$k^{(n)}$，$d^{(n)}$分别是齐$(1,-1)$，$(-n+1,n-1)$，$(-1,0)$，$(-n,n-1)$阶的.考虑$(n+1)$的情形。对任意整数对 p 与 q，命

$$D^{(n)}_{p,q}=i^{(n)}(D^{(n)}_{p-1,q+1}),$$

$$E^{(n+1)}_{p,q}=\frac{d^{(n)}:E^{(n)}_{p,q}\rightarrow E^{(n)}_{p-n,q+n-1}\text{ 的核}}{d^{(n)}(E^{(n)}_{p+n,q-n+1})}.$$

由导来偶的定义，不难看出命题对$(n+1)$亦成立。】

推论2.3 设 $D^{(n)}=\sum_{p,q}D^{(n)q}_{p,}$，$E^{(n)}=\sum_{p,q}E^{(n)}_{p,q}$ 如命题2.2，则

(i) $D^{(n)}_{p,q}=i^{(n-1)}i^{(n-2)}\cdots i^{(1)}(D_{p-n+1,q+n-1})$
$$=(i)^{n-1}(D_{p-n+1,q+n-1});$$

(ii) $D_{p,q}=D^{(1)}_{p,q}\supseteq D^{(2)}_{p,q}\supseteq\cdots\supseteq D^{(n-1)}_{p,q}\supseteq D^{(n)}_{p,q}\supseteq\cdots$;

(iii) $E^{(n)}_{p,q}$ 是 $E^{(n-1)}_{p,q}$ 的某一子群上的商群。】

附记1. 正合偶 $\mathscr{C}$ 适合条件(P)；其导来偶叙列中双梯群 $D^{(n)}$ 与 $E^{(n)}$ 亦皆为命题2.2的取法。这两点以后一般不再声明。

附记2. 双梯正合偶 $\mathscr{C}$ 中的同态 i,j,k 的作用可从下图表中看出：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & \\
\cdots & \xrightarrow{k} & D_{p,q+1} & \xrightarrow{j} & E_{p,q+1} & \xrightarrow{k} & D_{p-1,q+1} & \xrightarrow{j} & E_{p-1,q+1} & \xrightarrow{k} & D_{p-2,q+1} & \xrightarrow{j} & \cdots \\
 & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & \\
\cdots & \xrightarrow{k} & D_{p+1,q} & \xrightarrow{j} & E_{p+1,q} & \xrightarrow{k} & D_{p,q} & \xrightarrow{j} & E_{p,q} & \xrightarrow{k} & D_{p-1,q} & \xrightarrow{j} & \cdots \\
 & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & \\
\cdots & \xrightarrow{k} & D_{p+2,q-1} & \xrightarrow{j} & E_{p+2,q-1} & \xrightarrow{k} & D_{p+1,q-1} & \xrightarrow{j} & E_{p+1,q-1} & \xrightarrow{k} & D_{p,q-1} & \xrightarrow{j} & \cdots \\
 & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

由此可得出若干正合叙列。例如

$$\cdots\xrightarrow{j}E_{p+1,q}\xrightarrow{k}D_{p,q}\xrightarrow{i}D_{p+1,q-1}\xrightarrow{j}$$
$$E_{p+1,q-1}\xrightarrow{k}\cdots,$$

以后应用到纤维空间时，双梯正合偶 $\mathscr{C}=\langle D,E;\ i,j,k\rangle$ 除适合性质（P）外，还适合下述性质(**R**)：

$$\text{(R)}\qquad\begin{cases}\text{当 } p<0,\ D_{p,q}=0.\\ \text{当 } q>0,\ E_{p,q}=0.\end{cases}$$

此时称 $\mathscr{C}$ 为**正则（双梯）正合偶**。

显然，由 $D_{p,q}\xrightarrow{j}E_{p,q}\xrightarrow{k}D_{p-1,q}$ 的正合性，知当 $p<0$ 时有 $E_{p,q}=0$。此外，由推论2.3，当 $p<0$ 或 $q<0$ 有

$$E_{p,q}^{(n)}=0,\qquad n=1,2,\cdots.$$

一般地，设对任意整数 p 与 q，取 $n>\max\{p,q+1\}$，根据 $E_{p,q}^{(n)}$ 的定义，知 $E_{p,q}^{(n)}=E_{p,q}^{(n+1)}=E_{p,q}^{(n+2)}=\cdots$。

命

$$E_{p,q}^{(\infty)}=E_{p,q}^{(n)},\qquad n>\max\{p,q+1\}.$$

其次，因 $E_{p+1,q}\xrightarrow{k}D_{p,q}\xrightarrow{i}D_{p+1,q-1}\xrightarrow{j}E_{p+1,q-1}$ 的正合性，有

$$0=D_{-1,p+q+1}\xrightarrow{i}D_{0,p+q}\xrightarrow{i}D_{1,p+q-1}\xrightarrow{i}$$
$$\cdots\xrightarrow{i}D_{p-1,q+1}\xrightarrow{i}D_{p,q}\xrightarrow{i}$$
$$\cdots\xrightarrow{i}D_{p+q,0}\xrightarrow{i}D_{p+q+1,-1}$$
$$\overset{i}{\approx}D_{p+q+2,-2}\overset{i}{\approx}\cdots,$$

其中 $i:D_{p+q,0}\to D_{p+q+1,-1}$ 是在上同态。

为了方便起见，记$\mathscr{H}_{p,q}=\lambda_{p,q}(D_{p,q})$，其中

$$\lambda_{p,q}=i^{(q+1)}\cdot i^{(q)}\cdots\cdot i^{(1)}=(i)^{q+1}:D_{p,q}\to D_{p+q+1,-1}.$$

由推论2.3，知

$$\mathscr{H}_{p,q}=D^{(q+2)}_{p+q+1,-1},\quad \mathscr{H}_{p-1,q+1}=D^{(q+3)}_{p+q+1,-1}.$$

从而得到

$$\begin{aligned}D_{p+q+1,-1}=\mathscr{H}_{p+q+1,-1}&=\mathscr{H}_{p+q,0}\supseteq\mathscr{H}_{p+q-1,1}\\&\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{H}_{1,p+q-1}\supseteq\mathscr{H}_{0,p+q}\\&\supseteq\mathscr{H}_{-1,p+q+1}=0.\end{aligned}$$

命题2.4 设双梯正合偶$\mathscr{C}$适合性质（P）与（R），且$E^{(\infty)}_{p,q}$与$\mathscr{H}_{p,q}$等如上所述，则有

$$\mathscr{H}_{p,q}/\mathscr{H}_{p-1,q+1}\approx E^{(\infty)}_{p,q}.$$

证明 考虑$\mathscr{C}$的第$(n-1)$次导来偶

$$\mathscr{C}^{(n)}=\langle D^{(n)},\ E^{(n)};\ i^{(n)},j^{(n)},k^{(n)}\rangle,$$

$$D^{(n)}=\sum\nolimits_{p,q}D^{(n)}_{p,q},\qquad E^{(n)}=\sum\nolimits_{p,q}E^{(n)}_{p,q}.$$

当$n>\max\{p,\ q+2\}$，有

$$E^{(n)}_{p+n-1,\,q-n+2}=0,$$

$$D^{(n)}_{p-1,\,q}=(i)^{n-1}(D_{p-n,q+n-1})=0.$$

于是有正合叙列

$$0\xrightarrow{k^{(n)}}D^{(n)}_{p+n-2,\,q-n+2}\xrightarrow{i^{(n)}}D^{(n)}_{p+n-1,\,q-n+1}\xrightarrow{j^{(n)}}E^{(n)}_{p,q}\xrightarrow{k^{(n)}}0.$$

而

$$\begin{aligned}D^{(n)}_{p+n-2,\,q-n+2}&=(i)^{n-1}(D_{p-1,q+1})\\&\approx(i)^{q+2}(D_{p-1,q+1})=\mathscr{H}_{p-1,q+1},\\D^{(n)}_{p+n-1,\,q-n+1}&=(i)^{n-1}(D_{p,q})\\&\approx(i)^{q+1}(D_{p,q})=\mathscr{H}_{p,q},\end{aligned}$$

$$E^{(n)}_{p,q}=E^{(\infty)}_{p,q}.$$

故由图表

$$\begin{array}{ccc} D^{(n)}_{p+n-2,\ q-n+2} & \xrightarrow{i^{(n)}} & D^{(n)}_{p+n-1,\ q-n+1} \\ \downarrow\approx & & \downarrow\approx \\ \mathscr{H}_{p-1,q+1} & \xrightarrow{\subseteq} & \mathscr{H}_{p,q} \end{array}$$

的交换性，得到

$$E^{(\infty)}_{p,q}\approx\mathscr{H}_{p,q}/\mathscr{H}_{p-1,q+1}.\ \rbrack$$

例2.3 设K是有限单纯复形。当$p\geqslant 0$，取E_p是K的p维骨架；当$p<0$，记$K_p=\varnothing$。由例2.1及例2.2，有

$$D=\sum_{p,q}H_{p+q}(K_p),\quad E=\sum_{p,q}H_{p+q}(K_p,K_{p-1}),$$

$$\mathscr{C}=\langle D,E;i,j,k\rangle$$

是适合性质（**P**）与（**R**）的双梯正合偶，因而是正则（双梯）正合偶。

因为当$q\neq 0$，有

$$E_{p,q}=H_{p+q}(K_p,K_{p-1})=0$$

$$E_{p,0}=H_p(K_p,K_{p-1})=Z_p(K_p,K_{p-1})=C_p(K),$$

且$d=jk:E_{p,0}\to E_{p-1,0}$与$\partial:C_p(K)\to C_{p-1}(K)$一致。可见

$$E^{(2)}_{p,0}=H_p(k),\qquad E^{(2)}_{p,q}=0\quad(\text{如}q\neq 0).$$

当$n\geqslant 2$，因$d^{(n)}:E^{(n)}_{p,q}\to E^{(n)}_{p-n,q+n-1}$是平凡的，故

$$H(K)=E^{(2)}=E^{(3)}=\cdots=E^{(n)}=\cdots=E^{(\infty)},$$

其中$E^{(\infty)}=\sum_{p,q}E^{(\infty)}_{p,q}$。

附记 与下同调正合偶情形对偶的，可平行讨论适于上同调的正合偶。见本章练习2与3。

§3 升标群

定义3.1 设A是d-群，A称为一个**升标d-群**，如果A有一

个子群列 $\{A^p\}$（对所有整数 p），使得

$$A=\bigcup_p A^p,\quad A^p\subseteq A^{p+1},\quad d(A^p)\subseteq A^p.$$

又，记 $A^{-\infty}=0$。

定义3.2 设 A 是升标 d-群，J 是整数集。命

$$w(a)=\inf_{a\in A^p}\{p\},$$

称为 $a\in A$ 的重量。$w: A\to J\cup(-\infty)$ 称为 A 上的**重量函数**.

易见重量函数 w 具有性质：

(i) $w(a-b)\leqslant\max\{w(a),\ w(b)\}$;

(ii) $w(d(a))\leqslant w(a)$;

(iii) $w(0)=-\infty$.

由此，显然还有 $w(a)=w(-a)$，对于任意$a\in A$。

重要的是反过来，设 d-群 A 上有函数 $w: A\to J\cup(-\infty)$，具有上述性质(i)—(iii)，则 A 是升标 d-群. 此时，只须对任意整数 p，取

$$A^p=\{a\in A\,|\,m(a)\leqslant p\}.$$

现在，我们对一个升标 d-群 A 定义一个相应的（单梯）正合偶。

对整数 p，记 $\hat{A}^p=A^p/A^{p-1}$. 因 A^p 与 A^{p-1} 是 d-群，根据§1，d 在 $\hat{A}^p$ 上导出一个导算子 d^*. 而

$$0\longrightarrow A^{p-1}\xrightarrow{\ i\ }A^p\xrightarrow{\ j\ }\hat{A}^p\longrightarrow 0$$

是正合叙列（i 为包含同态，j 为自然投射）。故由命题1.2，三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}(A^{p-1}) & \xrightarrow{\mathscr{H}(i)} & \mathscr{H}(A^p) \\ & {}_{\partial}\nwarrow \quad \swarrow_{\mathscr{H}(j)} & \\ & \mathscr{H}(\hat{A}^p) & \end{array}$$

中的正合性成立。

命 D 与 E 为单梯群：

$$D=\sum_p D_p, \qquad D_p=\mathscr{H}(A^p),$$
$$E=\sum_p E_p, \qquad E_p=\mathscr{H}\hat{A}^p,$$

及 $i:D\to D$, $j:D\to E$, $k:E\to D$ 分别为上述三角形中 $\mathscr{H}(i)$, $\mathscr{H}(j)$ 与 ∂ 所确定的同态。于是，得到一个正合偶 $\mathscr{C}(A)=\langle D, E;\ i,\ j,\ k\rangle$，称为与升标 d-群 A 相联系的正合偶。此时 i，j 与 k 分别是齐 1 阶，齐 0 阶与齐 -1 阶的同态。

例3.1 在例2.1中，取

$$A=\bigcup_p A^p, \qquad A^p=C(K_p)=\sum_l C_l(K_p),$$

则 A 是升标 ∂-群，其中 $\partial:C_l(K_p)\to C_{l-1}(K_p)$ 为边沿导算子。于是

$$\mathscr{H}(A^p)=H(K_p), \qquad \mathscr{H}(\hat{A}^p)=H(K_p,K_{p-1}).$$

此时，$\mathscr{C}(A)$ 即例2.1的正合偶。

现在，设 A 与 B 分别是升标 d-群和升标 d'-群，即

$$A=\bigcup_p A^p, \qquad A^p\subseteq A^{p+1}, \qquad d(A^p)\subseteq A^p,$$

$$B=\bigcup_p B^p, \qquad B^p\subseteq B^{p+1}, \qquad d'(B^p)\subseteq B^p.$$

并设 $f:A\to B$ 为同态，使得

$$fd=d'f, \qquad f(A^p)\subseteq B^p.$$

则 f 导出同态 $\hat{f}:\hat{A}^p\to\hat{B}^p$，使得 $\hat{f}d^*=d'^*\hat{f}$ （d^* 与 d'^* 分别是 $\hat{A}^p$ 和 $\hat{B}^p$ 上的导算子）。由是导出同态

$$\mathscr{H}(f):\mathscr{H}(A^p)\to\mathscr{H}(B^p),$$

$$\mathscr{H}(\hat{f}):\mathscr{H}(\hat{A}^p)\to\mathscr{H}(\hat{B}^p).$$

且易见 $(\mathscr{H}(f)$ 与 $\mathscr{H}(\hat{f})):\mathscr{C}(A)\to\mathscr{C}(B)$ 是正合偶同态（见定义 2.3）。

在以后的应用中，常涉及的是适合下述性质（S）的单梯升标

d-群 $A=\bigcup_p A^p$。

$$
(S)\begin{cases}(1)\ A=\sum_m A_m,\ 对任意\ p,\ A^p=\sum_m(A_m\cap A^p);\\(2)\ 对任意\ m,\ d(A_m)\subseteq A_{m-1};\\(3)\ 如\ a\in A_l,\ a\neq 0,\ 则\ 0\leqslant w(a)\leqslant l.\end{cases}
$$

命题3.1 设单梯升标 d-群 A 具有性质(S)，则

(i) $A_p\subseteq A^p$，对任意 p；

(ii) 如 $m<0$，$A_m=0$；

(iii) 如 $p<0$，$A^p=0$。

证明 (i) 如 $a\in A_p$，$a\neq 0$，由 $p\geqslant w(a)=\inf\limits_{a\in A^q}\{q\}$ 及 $A^q\subseteq A^{q+1}$ 等，知 $a\in A^p$。

(ii) 如 $a\in A_m$，$a\neq 0$，那么 $m\geqslant w(a)\geqslant 0$。

(iii) 如 $A^p\neq 0$，因 $A^p=\sum_m(A_m\cap A^p)$，由(ii) 有 $m\geqslant 0$，使得 $A_m\cap A^p\neq 0$。即有 $a\neq 0$，$a\in A_m\cap A^p$，从而 $0\leqslant w(a)=\inf\limits_{a\in A^q}\{q\}$。故 $p\geqslant 0$。】

进而，我们考虑这样的与升标 d-群 A 相联系的正合偶

$$\mathscr{C}(A)=\langle D,E;i,j,k\rangle.$$

首先，A^p 有单梯构造，$A^p=\sum_m A_m^p$，其中 $A_m^p=A_m\cap A^p$。且 $d(A_m^p)\subseteq A_{m-1}^p$，即 d 是齐 -1 阶的。记

$$\mathscr{H}_m(A^p)=\frac{d:A_m^p\to A_{m-1}^p\text{的核}}{d(A_{m+1}^p)},$$

$$D_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(A^p).$$

易见

$$D_p=\mathscr{H}(A^p)=\sum_m\mathscr{H}_m(A^p)=\sum_q D_{p,q},$$

因而 $D=\sum_p D_p=\sum_{p,q}D_{p,q}$ 是双梯群。

其次，记 $\hat{A}_m^p=A_m^p/A_m^{p-1}$。易见 $\hat{A}^p=\sum_m\hat{A}_m^p$，且 $\hat{A}^p$ 上导算子 d^* 是齐-1阶同态，即 $d^*(\hat{A}_m^p)\subseteq\hat{A}_{m-1}^p$。于是

$$\mathscr{H}(\hat{A}^p)=\sum_m\mathscr{H}_m(\hat{A}^p),$$

其中

$$\mathscr{H}_m(\hat{A}^p)=\frac{d^*:\hat{A}^p\to\hat{A}^p_{m-1}\text{ 的核}}{d^*(\hat{A}^p_{m+1})}.$$

记 $E_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(\hat{A}^p)$，知 $E_p=\sum_m\mathscr{H}_m(\hat{A}^p)=\sum_q E_{p,q}$。因而 $E=\sum_p E_p=E_{p,q}E_{p,q}$ 是双梯群。

命题3.2 设 A 是适合性质（S）的单梯升标 d-群，$\mathscr{C}(A)=\langle D,E;i,j,k\rangle$，其中 D 与 E 的双梯构造如上所述。则 $\mathscr{C}(A)$ 具有性质(**P**)与(**R**)。即为正则（双梯）正合偶。

证明 根据定义

$$i(\mathscr{H}_{p+q}(A^p))\subseteq\mathscr{H}_{p+q}(A^{p+1}),$$
$$j(\mathscr{H}_{p+q}(A^p))\subseteq\mathscr{H}_{p+q}(\hat{A}^p),$$
$$k(\mathscr{H}_{p+q}(\hat{A}^p))\subseteq\mathscr{H}_{p+q-1}(A^{p-1}).$$

即性质（**P**）成立。

其次，对 $p<0$, $A^p=0$ 蕴涵着 $D_p=0$；因对一切 p，$A_p\subseteq A^p$。当$q<0$时，有

$$\hat{A}^p_{p+q}=\frac{A^p\cap A_{p+q}}{A^{p-1}\cap A_{p+q}}=\frac{A_{p+q}}{A_{p+q}}=0.$$

从而 $E_{p,q}=0$。即性质(**R**)成立。】

于是，根据§2，有$\mathscr{H}_{p,q}=(i)^{q+1}(D_{p,q})=D^{(q+2)}_{p+q+1,\,-1}$，及 $E^{(\infty)}_{p,q}=E^{(n)}_{p,q}$，当 $n>\max\{p,q+1\}$。

现在，对于适合(S)的单梯升标 d-群 $A=\bigcup_p A_p=\sum_m A_m$。记

$$\mathscr{H}_m(A)=\frac{d:A_m\to A_{m-1}\text{的核}}{d(A_{m+1})}.$$

易见 $\mathscr{H}(A)=\sum_m\mathscr{H}_m(A)$。

下面我们讨论 $\mathscr{H}_m(A)$ 与 $\mathscr{H}_{p,q}$，$E^{(\infty)}_{p,q}$ 的关系。

由于 $A^p\subseteq A$ 导出一个同态

$$h_{p,q}:D_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(A^p)\to\mathscr{H}_{p+q}(A).$$

记 $\mathscr{H}_{p,q}(A)=h_{p,q}(D_{p,q})\subseteq\mathscr{H}_{p+q}(A)$. 同时 $A^p\subseteq A^{p+1}$导出同态 $i:\mathscr{H}_{p+q}(A^p)\to\mathscr{H}_{p+q}(A^{p+1})$，即 $i:D_{p,q}\to D_{p+1,q-1}$.且在图表

$$\begin{array}{ccc} D_{p,q} & \xrightarrow{i} & D_{p+1,q-1} \\ & {}_{h_{p,q}}\searrow \quad \swarrow{}_{h_{p+1,q-1}} & \\ & \mathscr{H}_{p+q}(A) & \end{array}$$

中交换性成立。故

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)=h_{p,q}(D_{p,q})=h_{p+1,q-1}\cdot i(D_{p,q})$$
$$\subseteq h_{p+1,q-1}(D_{p+1,q-1})=\mathscr{H}_{p+1,q-1}(A).$$

且

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)=h_{p+q+1,-1}\cdot(i)^{q+1}(D_{p,q})$$
$$=h_{p+q+1,-1}(\mathscr{H}_{p,q}).$$

根据 $\mathscr{H}_m(A^m)$ 与 $\mathscr{H}_m(A)$ 的定义，及因对任意 p，有 $A_p\subseteq A_p$ 等，知：当 $q\leqslant 0$ 时 $h_{p,q}$ 是在上同态；当 $q<0$ 时 $h_{p,q}$ 是(在上)同构。从而有

$$\mathscr{H}_{m,0}(A)=\mathscr{H}_m(A),$$
$$\mathscr{H}_{m+1,-1}:\mathscr{H}_m(A^{m+1})\approx\mathscr{H}_m(A).$$

命题3.3 设A是适合性质（S）的单梯升标 d-群。则

$$\mathscr{H}_m(A)=\mathscr{H}_{m,0}(A)\supseteq\mathscr{H}_{m-1,1}(A)\supseteq\mathscr{H}_{m-2,2}(A)$$
$$\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{H}_{-1,m+1}(A)=0,$$

且

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)/\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A)\approx E^{(\infty)}_{p,q}.$$

证明 只须证明后一式为同构。因为

$$h_{p+q+1,-1}:\mathscr{H}_{p,q}\approx\mathscr{H}_{p,q}(A),$$
$$h_{p+q+1,-1}:\mathscr{H}_{p-1,q+1}\approx\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A).$$

及在图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}_{p-1,q+1}(A) & \subseteq & \mathscr{H}_{p,q}(A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (i)^{q+2}(D_{p-1,q+1})=\mathscr{H}_{p-1,q+1} & \subseteq & \mathscr{H}_{p,q}=(i)^{q+1}(D_{p,q}) \end{array}$$

中交换性成立。根据命题2.4，有

$$\begin{aligned} E_{p,q}^{(\infty)} &\approx \mathscr{H}_{p,q}/\mathscr{H}_{p-1,q+1} \\ &\approx \mathscr{H}_{p,q}(A)/\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A). \ \rbrack \end{aligned}$$

附记1. 命题表明，交换群 $\mathscr{H}_m(A)$ 有升标构造(虽然不一定有导算子)，即

$$\mathscr{H}_m(A)=\bigcup_q \mathscr{H}_{m-q,q}(A),$$

$$\mathscr{H}_{m-q-1,q+1}(A)\subseteq \mathscr{H}_{m-q,q}(A), \qquad 0\leqslant q\leqslant m+1.$$

此时

$$\sum_q \mathscr{H}_{m+q,q}(A)/\mathscr{H}_{m-q-1,q+1}(A)\approx \sum_q E_{m-q,q}^{(\infty)}$$

称为与升标群 $\mathscr{H}_m(A)$ 相联系的单梯群。

附记2. 以后可看出，关于升标 d-群的讨论与纤维空间中关于下同调的谱叙列的讨论相当。对偶地，若涉及上同调，则须考虑降标 d-群，讨论的方式与下同调情形相平行(见本章练习4)。

练　习　V

1. 证明命题1.2.
2. 设 $\mathscr{C}=\langle D,E;i,j,k\rangle$ 是适合性质(**P′**)的正合偶。

(**P′**) $\begin{cases} (1)\quad D=\sum_{p,q}D_{p,q}, \qquad E=\sum_{p,q}E_{p,q}; \\ (2)\quad i,j,k \text{ 分别是齐 } (-1,1) \text{ 阶，齐}(0,0)\text{ 阶，} \\ \qquad \text{齐 } (1,0) \text{ 阶的同态。} \end{cases}$

再设 $\mathscr{C}$ 的$(n-1)$次导来偶 $\mathscr{C}^{(n)}=\langle D^{(n)},E^{(n)};i^{(n)},j^{(n)},k^{(n)}\rangle$。试仿照命题2.2，证明 $D^{(n)}$ 与 $E^{(n)}$ 是双梯群，且 $i^{(n)}$，$j^{(n)}$，$k^{(n)}$，$d^{(n)}=j^{(n)}k^{(n)}$ 分别是齐$(-1,1)$，$(n-1,-n+1)$，

(1,0)，$(n,-n+1)$阶的同态。

3．设 $\mathscr{C}=\langle D,E;i,j,k\rangle$是适合(**P**′)的双梯正合偶，且适合性质(**R**′)：

$$(\mathbf{R}')\begin{cases}(1)\quad 当 q<0, & D_{p,q}=0;\\ (2)\quad 当 p<0, & E_{p,q}=0.\end{cases}$$

证明

(i) 如 $p<0$ 或 $q<0$，对任意 $n\geqslant 1$，$E^{(n)}_{p,q}=0$；

(ii) 当 $n>\max\{p,q+1\}$，$E^{(n)}_{p,q}=E^{(n+1)}_{p,q}=\cdots=E^{(\infty)}_{p,q}$；

(iii) 记 $\mathscr{H}'_{p,q}=(i)^p(D_{p,q})\subseteq D_{0,p+q}$，则

$$E^{(\infty)}_{p,q}\approx\mathscr{H}'_{p,q}/\mathscr{H}'_{p+1,q-1}.$$

4．设A是d-群。A称为**降标 d-群**，如果 A 有一个子群列$\{A^p\}$(p是整数)，使得$\bigcap_p A^p=\{0\}$，$A^{p+1}\subseteq A^p, d(A^p)\subseteq A^p$。试按照§3的办法，构造与 A 相联系的正合偶 $\mathscr{C}(A)$。进而在适当条件下，叙述并证明与命题3.2、命题3.3相应的命题。

5．设K是有限单纯复形，K_p是K的 p 维骨架($p\geqslant 0$)，$x_0\in K_0$。命 $D=\sum_{p,q}D_{p,q}$，　$E=\sum_{p,q}E_{p,q}$ 如下：

$$D_{p,q}=\begin{cases}\pi_{p+q}(K_p,x_0), & 如 p\geqslant 0,\ p+q\geqslant 2,\\ 0, & 其余 p,q,\end{cases}$$

$$E_{p,q}=\begin{cases}\pi_{p+q}(K_p,K_{p-1},x_0), & 如 p\geqslant 1,\ p+q\geqslant 3,\\ j[\pi_{p+q}(K_p,x_0)], & 如 p\geqslant 1,\ p+q=2,\\ 0, & 其余 p,\ q,\end{cases}$$

其中 j 是同伦正合叙列

$$\cdots\xrightarrow{k}\pi_m(K_{p-1},x_0)\xrightarrow{i}\pi_m(K_p,x_0)\xrightarrow{j}$$

$$\pi_m(K_p,K_{p-1},x_0)\xrightarrow{k}\pi_{m-1}(K_{p-1},x_0)\xrightarrow{i}\cdots$$

中的同态 j。证明：

(i) $\mathscr{C}(K,x_0)=\langle D,E;i,j,k\rangle$ 是正合偶，其中 i，j，k 由上述同伦叙列中的 i，j，k 规定。

(ii) $\mathscr{C}(K,x_0)$ 适合性质(P)。

(iii) 当 $p<2$ 或 $p+q<2$，$D_{p,q}=0$，

当 $q<0$ 及 $p+q>1$，$D_{p,q}\approx\pi_{p+q}(K,x_0)$。

(iv) 当 $p<2$ 或 $q<0$ 或 $p+q<2$，$E_{p,q}=0$。

(v) $\mathscr{C}(K,x_0)$ 适合性质(R)。

(vi) 设x_0与$x_1\in K_0$，$\xi:I\to K_1$ 是连接 x_0 到 x_1 的路径。则ξ 决定一个同构

$$(\Phi_\xi,\Psi_\xi):\mathscr{C}(K,x_1)\approx\mathscr{C}(K,x_0).$$

且当 $\xi\simeq\eta:(I,(0),(1))\to(K_1,x_0,x_1)$，有

$$(\Phi_\eta,\Psi_\eta)=(\Phi_\xi,\Psi_\xi).$$

注：正合偶 $\mathscr{C}(K,x_0)$ 称为复形K在顶点 x_0 处的同伦正合偶(参见[25])。

第六章　谱叙列在纤维空间的应用

〔内容提要〕

谱叙列最成功的应用之一是纤维空间的同调论，本章将对这方面作一粗略介绍。主要的材料取之于1951年 J.-P. Serre 的著名论文 "Homologie Singulière des espaces fibrés"[26]。

§1，为讨论的方便，仿照 Serré 的方法，叙述方边的广义同调论，定理1.4告诉我们，它与Ⅱ.§1通常的广义同调论是一致的。

§2是本章的中心。详细叙述了纤维映射 $\omega:X\to B$ 是如何决定它的下同调谱叙列。特别地，在广泛的条件下，计算

$$E^{(1)}=\sum_{p,q}E_{p,q},\quad E^{(2)}=\sum_{p,q}E^{(2)}_{p,q},$$

给出了典型的同构

$$\chi_{p,q}:E_{p,q}\approx C_p(B)\otimes H_q(F,G)\qquad(\text{定理}2.4),$$

$$\chi_{p,q}:E^{(2)}_{p,q}\approx H_p(B,H_q(F,G))\qquad(\text{定理}2.9).$$

这些是以后应用的基础。

§3与§4是纤维空间谱叙列的应用，得到了 J.-P. Serre 正合叙列，以及作为某种特殊情况的 Gysin 叙列与 Wang（王宪钟）叙列。

§5提出了 n-连通纤维空间及 (π,n)-伦型空间的概念，作为Ⅳ章的内容的一个补充，而其本身在计算同伦群中也有它的用途。

最后§6，运用前面所叙述的若干结果证明了同伦论中极重要的 Freudenthal 同纬像定理（以稍具一般的形式给出的）。并

进而归纳介绍了球 S^n 的同伦群计算的一些结果。

本章的内容需要同调论中以一般交换群 G 为系数群的万有系数定理（参阅附录 B 或[3]与[5]）。

§1　方边广义同调论

Ⅱ.§1中概述了拓扑空间的广义同调群的定义等，为后面应用到纤维空间的谱叙列情形，本节介绍另一种广义同调群——方边广义同调群，并指出它与一般的广义同调的一致性（因而在单纯复形时，与单纯同调是一致的）。

定义1.1　设 X 是一拓扑空间。X 上的一个 n 维广义方体 $u(n\geqslant 1)$，是指映射 $u:I^n\to X$，其中 I^n 是 n 维（欧氏）方体，见Ⅰ.§2。特别地，当 $n=0$，0维广义方体即是 X 中的一个点。

对 $n\geqslant 1$，命 $(n-1)$ 维广义方体 $\lambda_i^0 u$ 与 $\lambda_i^1 u:I^{n-1}\to X$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$(\lambda_i^0 u)(t_1,\cdots,t_{n-1})=u(t_1,\cdots,t_{i-1},0,t_i,\cdots,t_{n-1}),$$
$$(\lambda_i^1 u)(t_1,\cdots,t_{n-1})=u(t_1,\cdots,t_{i-1},1,t_i,\cdots,t_{n-1}),$$

分别称为 u 的第 i 个下面与第 i 个上面。

引理1.1　设 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有

$$\lambda_i^\varepsilon\lambda_j^\eta=\lambda_{j-1}^\eta\lambda_i^\varepsilon,\qquad \varepsilon,\eta=0\text{ 或 }1.$$

证明　对于 X 的任意 n 维广义方体 u，则有

$$\begin{aligned}
&((\lambda_i^\varepsilon\lambda_j^\eta)u)(t_1,\cdots,t_{n-2})\\
&\quad=\lambda_j^\eta u(t_1,\cdots,t_{i-1},\varepsilon,t_i,\cdots,t_{n-2})\\
&\quad=u(t_1,\cdots,t_{i-1},\varepsilon,t_i,\cdots,t_{j-2},\eta,t_{j-1},\cdots,t_{n-2})\\
&\quad=\lambda_i^\varepsilon u(t_1,\cdots,t_{j-2},\eta,t_{j-1},\cdots,t_{n-2})\\
&\quad=((\lambda_{j-1}^\eta\lambda_i^\varepsilon)u)(t_1,\cdots,t_{n-2}).\ \rrbracket
\end{aligned}$$

对 $n\geqslant 0$，命 $\hat{Q}_n(X)$ 是 X 中一切 n 维广义方体为基所生成的自由交换群；对 $n<0$，命 $\hat{Q}_n(X)=0$。

定义同态 $\partial:\hat{Q}_n(X)\to\hat{Q}_{n-1}(X)$ 如下：当 $n\leqslant 0$，$\partial=0$；当 $n\geqslant 1$，对广义方体 $u\in\hat{Q}_n(X)$，

$$\partial u=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}(\lambda_i^1 u-\lambda_i^0 u),$$

再作线性扩充得到同态 ∂. ∂ 称为边沿运算.

引理1.2 $\partial\partial=0$.

证明 不妨设 $n\geqslant 2$. 由于

$$\begin{aligned}\partial\partial&=\partial\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}(\lambda_i^1-\lambda_i^0)\\&=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\Big[\lambda_j^1\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}(\lambda_i^1-\lambda_i^0)\\&\qquad-\lambda_j^0\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}(\lambda_i^1-\lambda_i^0)\Big]\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(\lambda_j^1\lambda_i^1-\lambda_j^1\lambda_i^0-\lambda_j^0\lambda_i^1+\lambda_j^0\lambda_i^0).\end{aligned}$$

暂记

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\lambda_j^{\eta}\lambda_i^{\varepsilon}=\sum_{j<i}+\sum_{j>i},$$

对于任意给定的 η 与 $\varepsilon=0$ 或 1. 根据引理1.1, 当 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$, $\lambda_j^{\varepsilon}\lambda_{j+1}^{\eta}=\lambda_j^{\eta}\lambda_i^{\varepsilon}$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{j>i}&=\sum_{j>i}(-1)^{i+j}\lambda_i^{\varepsilon}\lambda_{j+1}^{\eta}\\&=\sum_{j>i}(-1)^{i+j+1}\lambda_i^{\varepsilon}\lambda_j^{\eta}\\&=\sum_{j<i}(-1)^{i+j+1}\lambda_j^{\varepsilon}\lambda_i^{\eta}.\end{aligned}$$

代入, $\partial\partial=0$. ∎

记 $\hat{Q}=\{\hat{Q}_n(X),\partial\}$ 为链复形(见Ⅱ. § 5中的定义), 它的同调群为

$$H(\hat{Q})=\{H_n(\hat{Q})=Z_n(\hat{Q})/B_n(\hat{Q})\}.$$

例1.1　设$X=\{x_0\}$是仅含一点的空间。对于$n\geqslant 0$，易见由唯一的映射$f_n:I^n\to x_0$作成$\hat{Q}_n(X)$的生成元，而$\lambda_i^1 f_n=\lambda_i^0 f_n$。因此

$$\hat{Q}_n(X)=Z_n(\hat{Q})\approx J,\qquad B_n(\hat{Q})=0.$$

故$H_n(\hat{Q})\approx J$，$n\geqslant 0$。

例子表明，此种链复形不能直接给出X的“正确”的同调群，而需要对$\{\hat{Q}_n(X),\partial\}$作适当的改进。下面就来做这一工作。

定义1.2　当$n\geqslant 1$，对任意广义方体$u\in\hat{Q}_n(X)$，命$\hat{D}(u)(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})=u(t_1,\cdots,t_n)$，$n\geqslant 1$；当$n=0$，命$\hat{D}(x)(t)=x$，$x\in X$是0维广义方体。再作线性扩充，得到同态$\hat{D}$: $\hat{Q}(X)\to\hat{Q}_{n+1}(X)$，称为退化运算。广义方体$u\in\hat{Q}_{n+1}(X)$ $(n\geqslant 0)$称为退化的，如果有$v\in\hat{Q}_n(X)$，使得$u=\hat{D}(v)$。换言之，即u作为I^{n+1}上的映射不依赖于点$(t_1,\cdots,t_{n+1})$的最末一个坐标。$\hat{Q}_{n+1}(X)$中一切退化广义方体自由生成的子群记为$\hat{D}_{n+1}(X)$，$n\geqslant 0$。当$n<0$，命$\hat{D}_{n+1}(X)=0$。

引理1.3　$\partial\hat{D}_{n+1}(X)\subseteq\hat{D}_n(X)$。

证明　根据定义，当$1\leqslant i\leqslant n$有$\lambda_i^\varepsilon\hat{D}=\hat{D}\lambda_i^\varepsilon$及$\lambda_{n+1}^\varepsilon\hat{D}=1$（恒同），$\varepsilon=0,1$。于是，对于$v\in\hat{Q}_n(X)$，有

$$\begin{aligned}\partial\hat{D}v&=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i(\lambda_i^1\hat{D}v-\lambda_i^0\hat{D}v)\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\hat{D}\lambda_i^1 v-\hat{D}\lambda_i^0 v)\\&=\hat{D}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\lambda_i^1 v-\lambda_i^0 v).\end{aligned}$$

故$\partial \hat{D}_{n+1}(X) \subseteq \hat{D}_n(X)$。】

可见，$\hat{D}=\{\hat{D}_n(X),\partial\}$是$\hat{Q}=\{\hat{Q}_n(X),\partial\}$的子链复形。考虑商链复形$\hat{C}=\{\hat{C}_n(X),\partial\}$，其中$\hat{C}_n(X)=\hat{Q}_n(X)/\hat{D}_n(X)$（见Ⅱ．§5）。而$\hat{C}$的同调群

$$H(\hat{H})=\{H_n(\hat{C})=Z_n(\hat{C})/B_n(\hat{C})\}$$

称为X的（整系数）**方边广义（下）同调群**。

附记 以上考虑的是系数群为整数加群的情况。对于一般的以交换群G为系数群的情形，以及方边广义上同调群的情形，可仿照通常的办法定义如下。

记

$$\hat{C}_n(X,G)=\hat{C}_n\otimes G,$$

$$\hat{C}^n(X,G)=\mathrm{Hom}(\hat{C}_n(X),G),$$

这里$\otimes$是张量积（见附录B §1），Hom是同态群的记号（见[1] Ⅴ．§1）。

由命$\partial(a_n\otimes g)=(\partial a_n)\otimes g$给出同态

$$\partial:\hat{C}_n(X,G)\to\hat{C}_{n-1}(X,G);$$

及命$\delta(a^n)(a_{n+1})=\langle a^n,\partial a_{n+1}\rangle$（Kronecker 积）给出同态

$$\delta:\hat{C}^n(X,G)\to\hat{C}^{n+1}(X,G).$$

容易验证

$$\partial\partial=0,\qquad \delta\delta=0.$$

于是

$$H_n(\hat{C},G)=\frac{\partial:\hat{C}_n(X,G)\to\hat{C}_{n-1}(X,G)\text{的核}}{\partial\hat{C}_{n+1}(X,G)},$$

$$H^n(\hat{C},G)=\frac{\delta:\hat{C}^n(X,G)\to\hat{C}^{n+1}(X,G)\text{的核}}{\delta\hat{C}^{n-1}(X,G)},$$

分别称为以G为系数群，X的n维**方边广义下同调群**与X的n维**方边广义上同调群**。

定理1.4　设$H_n(X)$是拓扑空间X的（整系数）n维广义（下）同调群（见Ⅱ.§1），则

$$H_n(X)\approx H_n(\hat{C}).$$

证明　记$\triangle^n$是$(n+1)$维方体I^{n+1}中的n维“单位单形”

$$\triangle^n=\left\{(y_0,y_1,\cdots,y_n)\in I^{n+1}\,\middle|\,0\leqslant y_i\leqslant 1,\quad \sum_{i=0}^{n} y_i=1\right\}$$

（见图1.1）。

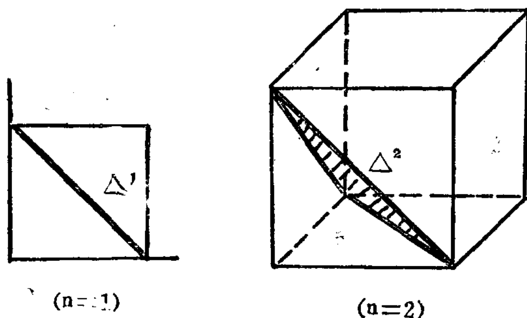


图　1.1

命$\varphi_n: I^n\to\triangle^n$为映射，使得

$$\begin{aligned}
y_0&=1-x_1,\\
y_1&=x_1(1-x_2),\\
&\vdots\\
y_{n-1}&=x_1x_2\cdots x_{n-1}(1-x_n),\\
y_n&=x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n,
\end{aligned}$$

其中$(x_1,\cdots,x_n)$为点$x\in I^n$的直角坐标，$(y_0,\cdots,y_n)$为点$\varphi_n(x)\in\triangle^n$的重心坐标。于是，$\varphi_n$导出$n$维广义单形到$n$维广义方体之

间的映射 φ：设 $T^n=(\xi,\triangle^n)$ 是 X 上 n 维广义单形，则 $u=\varphi(T^n)=\xi\cdot\varphi_n:I^n\to X$ 是 X 上的 n 维广义方体。因此可得到同态

$$\varphi:C_n(X)\to\hat{C}_n(X),$$

显然有 $\partial\varphi=\varphi\partial$。

进而，φ 导出广义同调群与方边广义同调群的同构（细节从略）。】

附记 一般亦有自然同构

$$H_n(X,G)\approx H_n(\hat{C},G),$$

$$H^n(X,G)\approx H^n(\hat{C},G).$$

证明请见 Eilenberg 与 Maclane 的文章[14]。

以后在不致引起混淆时，分别用 $H_n(X)$ 与 $H_n(X,G)$ 表示 $H_n(\hat{C})$ 与 $H_n(\hat{C},G)$。

现在设 X 是路径连通空间，$x_0\in X$。

对 $n\geqslant 0$，命 $Q_n(X)$ 是 $\hat{Q}_n(X)$ 是一切具有下述性质的广义方体 $u:I^n\to X$ 自由生成的子群：u 将 I^n 的各顶点均映射至 x_0，其中 $(t_1,\cdots,t_n)\in I^n$ 称为它的顶点，如果对每个 i，$t_i=0$ 或 1。对 $n<0$，命 $Q_n(X)=0$。

记 $D_n(X)=Q_n(X)\cap\hat{D}_n(X)$。易见，如果广义方体 $u\in D_{n+1}(X)$，且设 $u=\hat{D}v$，$v\in\hat{Q}_n(X)$，则 $v\in Q_n(X)$。根据定义，显然 $Q=\{Q_n(X),\partial\}$，$D=\{D_n(X),\partial\}$，分别为 $\hat{Q}=\{\hat{Q}_n(X),\partial\}$，$\hat{D}=\{\hat{D}_n(X),\partial\}$ 的子链复形。且有

命题1.5 对每一个整数 n，存在链映射 $\theta:\hat{Q}_n(X)\to Q_n(X)$ 及链同伦 $\Delta:\hat{Q}_n(X)\to\hat{Q}_{n+1}(X)$，使得对于一切 n，有

$$i\theta-1=\partial\Delta+\Delta\partial:\hat{Q}_n(X)\to\hat{Q}_n(X),$$

其中 $1:\hat{Q}_n(X)\to\hat{Q}_n(X)$ 是恒同链映射，$i:Q_n(X)\to\hat{Q}_n(X)$ 是包含链映射。且适合性质：

(i) 如果广义方体 $u\in Q_n(X)$，则 $\theta(u)=u$；

(ii) $\theta(\hat{D}_n(X)) \subseteq D_n(X)$;

(iii) $\Delta(\hat{D}_n(X)) \subseteq \hat{D}_{n+1}(X)$.

证明 当$n<0$，命θ与Δ为零同态，即具有上述三个性质。下设$n\geqslant 0$。我们将对每个广义方体$u: I^n\to X$，定义广义方体$\theta(u): I^n\to X$及$\Delta(u): I^{n+1}=I^1\times I^n\to X$，使得

（1）$\theta(u)\in Q_n(X)$，且

$$u(t_1,\cdots,t_n)=\Delta(u)(0,t_1,\cdots,t_n),$$

$$\theta(u)(t_1,\cdots,t_n)=\Delta(u)(1,t_1,\cdots,t_n);$$

（2）如$n\geqslant i$，则 $\Delta(\lambda_i^{\varepsilon}u)=\lambda_{i+1}^{\varepsilon}\Delta(u)$， 其中$1\leqslant i\leqslant n$，$\varepsilon=0$或$1$；

（3）如$n=0, u=x\in X$是0维广义方体，则$\theta(u)=x_0$，$\Delta(u)$是路径：$(I,(0),(1))\to(X,(x_0),(x))$。特别地，当$u=x_0$，$\Delta(u)$是常值映射：$I\to(x_0)$；

（4）如$u\in Q_n(X)$，则$\theta(u)=u$；

（5）如 $u=\hat{D}v$，$v\in\hat{Q}_{n-1}(X)$是$(n-1)$维广义方体，$n\geqslant 1$，则

$$\Delta(u)(t,t_1,\cdots,t_n)=\Delta(v)(t,t_1,\cdots,t_{n-1}).$$

事实上，因X是路径连通的，对$n=0$，可定义θ与Δ使得(3)成立。利用同伦扩充性质（命题Ⅰ.4.3），对$n\geqslant 1$，容易用归纳法定义θ与Δ，使得(1)，(2)，(4)及(5)成立。

于是线性扩充得到同态$\theta: \hat{Q}_n(X)\to Q_n(X)$及$\Delta: \hat{Q}_n(X)\to\hat{Q}_{n+1}(X)$。而由（1）与（2），有

$$\begin{aligned}\partial\Delta(u)&=\lambda_1^1\Delta(u)-\lambda_1^0\Delta(u)+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i[\lambda_i^1\Delta(u)-\lambda_i^0\Delta(u)]\\&=\lambda_1^1\Delta(u)-\lambda_1^0\Delta(u)-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i[\Delta\lambda_i^1(u)-\Delta\lambda_i^0(u)]\\&=i\theta(u)-u-\Delta\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\lambda_i^1-\lambda_i^0)(u).\end{aligned}$$

知$i\theta-1=\partial\Delta+\Delta\partial$。

又(1)，(4)和(5)蕴涵着命题中性质(i)，(ii)及(iii)。】

现在考虑商链复形 $C=\{C_n(X),\partial\}$，其中

$$C_n(X)=Q_n(X)/D_n(X).$$

由

$$\hat{C}_n(X)=\hat{Q}_n(X)/\hat{D}_n(X),\quad D_n(X)=Q_n(X)\cap\hat{D}_n(X),$$

故有自然同态 $\phi:C_n(X)\to\hat{C}_n(X)$，它是在中同构，且 $\phi\partial=\partial\phi$。

命题1.6 $\phi:C_n(X)\to\hat{C}_n(X)$ 是链等价. 因而

$$\phi_*:H_n(C)\approx H_n(\hat{C}).$$

证明 根据命题1.5，θ 导出链映射 $\theta:\hat{C}_n(X)\to C_n(X)$ 及 Δ 导出同态 $\Delta:\hat{C}_n(X)\to\hat{C}_{n+1}(X)$，使得 $\phi\theta-1=\partial\Delta+\Delta\partial$。因 ϕ 是在中同构，故 ϕ 是链等价（即 $\phi\theta$ 与 1 链同伦，$\theta\phi$ 与 1 链同伦。见[1] Ⅳ. § 1)。】

实际上，当 $n\geqslant 0$，$Q_n(X)$ 中 X 的非退化的 n 维广义方体的全体组成 $C_n(X)$ 的一个基。因之 $C_n(X)$ 是自由交换群，称为 X 的 n 维方边广义链群。

附记1. 根据命题，以后我们只涉及 $Q_n(X)$ 中的广义方体，而由此构造的方边广义同调群与定理1.4中的同调群是同构的。

附记2. 相类似地考虑，可得到相对的方边广义同调群。

设 (X,X_0) 是拓扑空间偶，$x_0\in X_0$，对任意整数 n，$C_n(X_0)$ 是 $C_n(X)$ 的子群。

命

$$C_n(X,X_0)=C_n(X)/C_n(X_0),$$

它同构于在 X 中而不在 X_0 中的 n 维非退化广义方体所自由生成的交换群。自然，$C_n(X)$ 上的边沿同态 ∂ 导出同态

$$\partial:C_n(X,X_0)\to C_{n-1}(X,X_0).$$

因 $\partial\partial=0$，有链复形 $\{C_n(X,X_0),\partial\}$；从而有相对的方边广义同调群 $\{H_n(X,X_0)\}$。并不难把它推广到一般的交换群 G

作系数群的情形。

§2　纤维空间的谱叙列

现在转入正题，介绍纤维映射的下同调谱叙列，主要运用升标 ∂ 群的若干性质（见V．§3）。类似地考虑，运用降标 δ 群等，有纤维映射的上同调谱叙列（见本章末练习1与2）。

设 $\omega: X \to B$ 是纤维映射，取 $b_0 \in B$，记 $F=\omega^{-1}(b_0)$，$x_0 \in F$。并设 B 与 F 是路径连通空间，因而 X 亦是路径连通的。根据命题1.6，考虑 X 与 B 上的方边广义同调群时，可假定 X 与 B 上的广义方体 u 将 I^n 的各顶点都分别映射到 x_0 与 b_0。

我们对单梯群 $Q(X)=\sum\limits_n Q_n(X)$ 给出升标构造 $Q(X)=\bigcup_p Q^p(X)$ 如下（其中 $Q_n(X)$ 意义见§1）：

当 $p<0$，命 $Q^p(X)=Q_p(X)=0$。

设 $p\geqslant 0$，n 维方体 $u\in Q_n(X)$ 称为重量 $w(u)\leqslant p$，如果：或者 $n\leqslant p$，或者当 $n>p$ 时，映射 $\omega u: I^n \to B$ 与 $(t_1,\cdots,t_n)\in I^n$ 的后 $(n-p)$ 个坐标无关，即对于 $(t_1,\cdots,t_p,t_{p+1},\cdots,t_n)$，$(t_1,\cdots,t_p,t'_{p+1},\cdots,t'_n)\in I^n$，有

$$\omega u(t_1,\cdots,t_p,t_{p+1},\cdots,t_n)=\omega u(t_1,\cdots,t_p,t'_{p+1},\cdots,t'_n).$$

换言之，$u(t_1,\cdots,t_p,t_{p+1},\cdots,t_n)$ 与 $u(t_1,\cdots,t_p,t'_{p+1},\cdots,t'_n)$ 属于 X 中的同一个纤维之中。

命 $Q^p(X)$ 为一切重量 $w(u)\leqslant p$ 的广义方体 $u: I^n\to X$（任意整数 n）所自由生成的 $Q(X)$ 的子群。

命题2.1　$Q(X)$ 对上述改造是升标 ∂-群。

证明　$Q(X)=\bigcup_p Q^p(X)$。

当 n 维广义方体 $u\in Q_n(X)$，$n\geqslant 0$，$w(u)\leqslant p$，显然有 $w(u)\leqslant p+1$，即 $Q^p(X)\subseteq Q^{p+1}(X)$。

如 $w(u)\leqslant p$，知 $w(\lambda_i^{\varepsilon}u)\leqslant p$，$1\leqslant i\leqslant n$，$\varepsilon=0$ 或 1，即

$$\partial Q^p(X)\subseteq Q^p(X). \ ]$$

附记1. 广义方体 u 的重量 $w(u)=p$，即当

（1）$w(u)\leqslant p$ 成立；

（2）$w(u)\leqslant p-1$ 不成立。

附记2. 根据 $Q^p(X)$ 的定义，易见 $Q(X)$ 是满足V.§3的性质（S）的单梯群。从而，对于任意 p，$Q_p(X)\subseteq Q^p(X)$；$p<0$时，$Q^p(X)=0$。

进一步考虑单梯群

$$C(X)=\sum_n C_n(X)=\sum_n (Q_n(X)/D_n(X)).$$

命 $\Psi:Q(X)\to C(X)$ 为自然同态。记 $C^p(X)=\Psi(Q^p(X))$。因 Ψ 是在上同态，$Q^p(X)\subseteq Q^{p+1}(X)$，且 $\partial\Psi=\Psi\partial$，于是

$$C(X)=\bigcup_p C^p(X),\qquad C^p(x)\subseteq C^{p+1}(X),$$
$$\partial C^p(X)\subseteq C^p(X).$$

即 $Q(X)$ 上的升标构造自然导出 $C(X)$ 上的升标构造，$C(X)$ 是单梯升标 ∂-群。

对 $c(X)\in C(X)$，记 $w(c(X))=\inf\limits_{c(X)\in C^q(X)}\{q\}$。

命题2.2 上述单梯升标∂-群$C(X)=\sum_n C_n(X)=\bigcup_p C^p(X)$具有性质（$S$）。即

（1）对任意 p，$C^p(X)=\sum_n[C_n(X)\cap C^p(X)]$；

（2）对任意 n，$\partial C_n(X)\subseteq C_{n-1}(X)$；

（3）如果 $c(X)\in C_l(X)$，$c(X)\neq 0$，则 $0\leqslant w(c(X))\leqslant l$。

证明 （1）由上附记2，$Q^p(X)=\sum_n[Q_n(X)\cap Q^p(X)]$，因

$$C^p(X)=\Psi(Q^p(X)),\qquad C_n(X)=\Psi(Q_n(X)),$$

且当 $n\neq n'$，$C_n(X)\cap C_{n'}(X)=\{0\}$。故

$$C_n(X)\cap C^p(X)=\Psi(Q_n(X)\cap Q^p(X)),$$

且 $C^p(X)=\sum_n[C_n(X)\cap C^p(X)]$。

(2) 从 ∂ 定义，是明显的。

(3) 当 $p<0$, $C^p(X)=0$, 且 $C_p(X)\subseteq C^p(X)$，从而对 $c(X)\in C_l(X)$, $c(X)\neq 0$，有 $0\leqslant w(c)\leqslant l$。】

附记 实际上，当 $n\geqslant 0$，X 中一切非退化的 n 维广义方体在 Ψ 下的像作成 $C_n(X)$ 的基，因而 $C_n(X)\cap C^p(X)$ 是 $C_n(X)\cap C^{p+1}(X)$ 的直加项，$C^p(X)$ 是 $C^{p+1}(X)$ 的直加项。

如果考虑以交换群 G 为系数群，一般地命

$$A(X)=C(X,G)=C(X)\otimes G,$$

$A(X)$ 上的边沿运算如通常定义。即 $\partial: C(X,G)\to C(X,G)$，使得 $\partial(c(X)\otimes g)=(\partial c(X))\otimes g$，对于 $c(X)\in C(X)$，$g\in G$。

$A(X)$ 有单梯构造 $A(X)=\sum_n A_n(X)$，其中

$$A_n(X)=C_n(X,G)=C_n(X)\otimes G.$$

此时 ∂ 为齐 (-1) 阶同态。

再命 $A^p(X)=C^p(X)\otimes G$，容易验证：

$A(X)=\bigcup_p A^p(X)$；

$A^p(X)\subseteq A^{p+1}(X)$ (因 $C^p(X)$ 是 $C^{p+1}(X)$ 的直加项)；

$\partial A^p(X)\subseteq A^p(X)$。

可见，$A(X)$ 亦是单梯升标 ∂-群。

对 $a(X)\in A(X)$，记 $w(a(X))=\inf\limits_{a(X)\in A^q(X)}\{q\}$。我们有下述命题

命题2.3 上述单梯升标 ∂-群

$$A(X)=\sum_n A_n(X)=\bigcup_p A^p(X)$$

具有性质 (S)。即

(1) 对任意 p，$A^p(X)=\sum_n[A_n(X)\cap A^p(X)]$；

(2) 对任意 n，$\partial A_n(X)\subseteq A_{n-1}(X)$；

（3）如 $a(X)\in A_l(X)$，$a(X)\neq 0$，则$0\leqslant w(a)\leqslant l$。

证明　略.】

现在考虑与上述单梯升标∂-群$A(X)$相联系的正合偶$\mathscr{C}(A)=\langle D,E;i,j,k\rangle$。为了方便起见，将$A(X)$等中的记号$X$省去，但注意均表示与空间$X$相应。

由Ⅴ.§2与§3的讨论，总结起来有以下几点：

（1）$A^p=\sum_n A_n^p$ 是链复形

$$\cdots\xrightarrow{\partial}A_{n+1}^p\xrightarrow{\partial}A_n^p\xrightarrow{\partial}A_{n-1}^p\xrightarrow{\partial}\cdots,$$

其中$A_n^p=A_n\cap A^p$。且A^{p-1}是A^p的子链复形。如$p<0$，$A^p=0$；如$n<0$，$A_n=0$。

记商链复形$\hat{A}^p=A^p/A^{p-1}$及$\hat{A}_n^p=A_n^p/A_n^{p-1}$，便有$\hat{A}^p=\sum_n\hat{A}_n^p$，且

$$\cdots\xrightarrow{\partial}\hat{A}_{n+1}^p\xrightarrow{\partial}\hat{A}_n^p\xrightarrow{\partial}\hat{A}_{n-1}^p\xrightarrow{\partial}\cdots.$$

（2）双梯群$D=\sum_{p,q}D_{p,q}$，其中$D_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(A^p)$，及$E=\sum_{p,q}E_{p,q}$，其中$E_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(\hat{A}^p)$。而$i,j,k$分别是链复形偶（$A^p$，$A^{p-1}$）的同调叙列

$$\cdots\xrightarrow{k}\mathscr{H}_n(A^{p-1})\xrightarrow{i}\mathscr{H}_n(A^p)\xrightarrow{j}\mathscr{H}_n(\hat{A}^p)$$
$$\xrightarrow{k}\mathscr{H}_{n-1}(A^{p-1})\xrightarrow{i}\cdots$$

中的同态。

（3）当$p<0$，$D_{p,q}=0$；当$p<0$或$p<0$，$E_{p,q}=0$（见命题Ⅴ.3.2）。

（4）进一步考虑$\mathscr{C}(A)$的各次导来偶

$$\mathscr{C}^{(n)}(A)=\langle D^{(n)},E^{(n)};\ i^{(n)},j^{(n)},k^{(n)}\rangle,\ n\geqslant 1.$$

知　$\mathscr{C}^{(1)}(A)=\mathscr{C}(A)$。又

$$D^{(n)}=\sum_{p,q}D_{p,q}^{(n)},\qquad E^{(n)}=\sum_{p,q}E_{p,q}^{(n)}.$$

且

$$i^{(n)}(D_{p,q}^{(n)})\subseteq D_{p+1,q-1}^{(n)},$$
$$j^{(n)}(D_{p,q}^{(n)})\subseteq E_{p-n+1,q+n-1}^{(n)},$$
$$k^{(n)}(E_{p,q}^{(n)})\subseteq D_{q-1,q}^{(n)}.$$

即 $i^{(n)}$，$j^{(n)}$ 与 $k^{(n)}$ 分别是齐 $(1,-1)$，$(-n+1,n-1)$ 与 $(-1,0)$ 阶的同态(见命题Ⅴ.2.2)。

(5) $D_{p,q}^{(n+1)}=i^{(n)}(D_{p-1,q+1}^{(n)})=(i)^n(D_{p-n+1,q+n-1})$，

$$E_{p,q}^{(n+1)}=\frac{d^{(n)}:E_{p,q}^{(n)}\to E_{p-n,q+n-1}^{(n)}\text{的核}}{d^{(n)}(E_{p+n,q-n+1}^{(n)})},$$

其中 $d^{(n)}=j^{(n)}k^{(n)}$ (见命题Ⅴ.2.2)。

(6) 当 $n>\max\{p,q+1\}$ 时，对任意 q 与 p，有

$$E_{p,q}^{(n)}=E_{p,q}^{(n+1)}=\cdots=E_{p,q}^{(\infty)}.$$

命 $\mathscr{H}_{p,q}=(i)^{q+1}(D_{p,q})\subseteq D_{p+q+1,-1}$，便有

$$D_{p+q+1,-1}=\mathscr{H}_{p+q,0}\supseteq\mathscr{H}_{p+q-1,1}\supseteq\cdots$$
$$\supseteq\mathscr{H}_{0,p+q}\supseteq\mathscr{H}_{-1,p+q+1}=0.$$

且

$$\mathscr{H}_{p,q}/\mathscr{H}_{p-1,q+1}\approx E_{p,q}^{(\infty)}\ \text{(见命题Ⅴ.2.4)}.$$

(7) 命 $h_{p,q}:D_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(A^q)\to\mathscr{H}_{p+q}(A)$ 是包含映射 $A^p\subseteq A$ 导出的同态．记

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)=h_{p,q}(D_{p,q})\subseteq\mathscr{H}_{p+q}(A).$$

于是，在图表

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathscr{H}_{p,q}(A)\\ \approx\uparrow h_{p+q+1,-1} & & \approx\uparrow h_{p+q+1,-1}\\ \mathscr{H}_{p-1,q+1} & \xrightarrow{\subseteq} & \mathscr{H}_{p,q}\end{array}$$

中交换性成立。从而有

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)/\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A)\approx E_{p,q}^{(\infty)}\text{(命题Ⅴ.3.3)}.$$

以下我们就来讨论纤维映射 $\omega:X\to B$ 所联系的上述导来偶叙

列

$$\mathscr{C}(A)=\mathscr{C}^{(1)},\ \mathscr{C}^{(2)}(A),\cdots,\mathscr{C}^{(n)}(A),\ \cdots,$$

其中 $\mathscr{C}^{(n)}(A)=\langle D^{(n)},\ E^{(n)};\ i^{(n)},\ j^{(n)},\ k^{(n)}\rangle$，以及它所决定的谱叙列

$$E=E^{(1)},\ E^{(2)},\ \cdots,\ E^{(n)},\ \cdots.$$

我们主要是计算 $E^{(1)}=\sum_{p,q}E_{p,q}$ 及 $E^{(2)}=\sum_{p,q}E^{(2)}_{p,q}$。

设 $u:I^m\to X$ 是 $Q_m(X)$ 中的广义方体。对一切适合：重量 $w(u)\leqslant p\leqslant m$ 的 p，可定义两个广义方体 $B_pu:I^p\to B$，$F_pu:I^q\to F$，其中 $q=m-p$，使得

$$B_pu(t_1,\ \cdots,\ t_p)=\omega u(t_1,\ \cdots,\ t_p,\ 0,\cdots,0),$$
$$F_pu(t_1,\ \cdots,\ t_q)=u(0,\cdots,0,t_1,\cdots,t_q).$$

实际上，因 $w(u)\leqslant p$，

$$\omega F_pu(t_1,\cdots,t_p)=\omega u(0,\cdots,0,t_1,\cdots,t_q)=\omega u(0,\cdots,0)=b_0,$$

知 $F_pu(t_1,\cdots,t_q)\in F$。

根据定义，知

(i) B_pu 与 F_pu 分别将 I^p 与 I^q 的各顶点映射至 x_0 与 b_0。因为一切 $w(u)\leqslant p$ 的 m 广义方体 $u\in Q_m(X)$ 组成$Q_m(X)\cap Q^p(X)$ 的基，命同态

$$\Phi:Q_m(X)\cap Q^q(X)\to Q_p(B)\otimes Q_q(F),$$

使得 $\Phi(u)=B_pu\otimes F_qu$。

(ii) 如 u 是退化广义方体，即 $u\in D_m(X)$，当 $q=0$，B_pu 是退化的；当 $q>0$，F_pu 是退化的，即 $F_pu\in D_q(F)$。于是 Φ 自然导出同态

$$\Phi':C_m(X)\cap C^p(X)\to C_p(B)\otimes C_q(F).$$

一般地，如以 G 为系数群，Φ 导出同态

$$\Phi':A^m_p=(C_m(X)\cap C^p(X))\otimes G\to C_p(B)\otimes C_q(F,G)).$$

(iii) 如 $w(u)\leqslant p-1$，则B_pu 是退化的。于是由 $\Phi'(A^{p-1}_m)=0$，Φ 导出同态

$$\theta:\widehat{A}^p_m=(A^p_m/A^{p-1}_m)\to C_p(B)\otimes C_q(F,G)\ .$$

简记

$$K^p = C_p(B)\otimes G_q(F,G) = \sum_m K_m^p,$$

其中 $K_m^p = C_p(B)\otimes C_q(F,G)$，$m=p+q$。及命 $\partial_F: K_m^p \to K_{m-1}^p$ 为同态，使得对 K_m^p 的生成元 $b\otimes f\otimes g$ 有

$$\partial_F(b\otimes f\otimes g) = (-1)^p b\otimes \partial f\otimes g.$$

易见 $\partial_F\partial_F=0$。因$C_p(B)$ 是自由群，有

$$C_p(B)\otimes H_q(F,G) = \frac{\partial_F: K_m^p \to K_{m-1}^p \text{ 的核}}{\partial_F(K_{m+1}^p)}$$

$$= \mathscr{H}_{p+q}(K^p).$$

(iv) 如 $w(u)=p$，当 $1\leqslant i\leqslant p$，则 $w(\lambda_i^\varepsilon u)>p$；当 $p+1\leqslant i\leqslant m$，则 $w(\lambda_i^\varepsilon u)\leqslant p$。且根据定义

$$B_p\lambda_i^\varepsilon u = B_p u, \qquad F_p\lambda_i^\varepsilon u = \lambda_{i-p}^\varepsilon F_p u,$$

其中 $\varepsilon=0$ 或 1。故有 $\partial u = v+v'$，其中

$$v = \sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\lambda_i^1 u - \lambda_i^0 u \in Q_{m-1}(X)\cap Q^{p-1}(X)$$

$$\subseteq Q_{m-1}(X)\cap Q^p(X),$$

$$v' = \sum_{i=1}^{q}(-1)^{p+i}(\lambda_{i+p}^1 u - \lambda_{i+p}^0 u).$$

但

$$\Phi v' = (-1)^p\sum_{i=1}^{q}(-1)^i B_p u\otimes(\lambda_i^1 F_p u - \lambda_i^0 F_p u)$$

$$= (-1)^p B_p u\otimes \partial F_p u.$$

根据定义，交换性在图表

$$\begin{array}{ccc}
\hat{A}_m^p & \xrightarrow{\partial} & \hat{A}_{m-1}^p \\
\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\
K_m^p & \xrightarrow{\partial_F} & K_{m-1}^p
\end{array}$$

中成立，从而对每一对 (p,q)，θ 导出同态

$$\chi_{p,q}:E_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(\hat{A}_q)\to C_p(B)\otimes H_q(F,G).$$

附记 上述讨论中假定 $q=m-p\geqslant 0$。如 $q<0$，因 $E_{p,q}=0$，$H_q(F,G)=0$，我们将仍用 $\chi_{p,q}$ 表示显然的同态。

重要的是，有

定理2.4 设 $\omega:X\to B$ 是纤维映射，$b_0\in B, x_0\in F=\omega^{-1}(b_0)$，$B$ 与 F 是路径连通的。$\chi_{p,q}$ 等如上所述。则

$$\chi_{p,q}:E_{p,q}.\approx C_p(B)\otimes H_q(F,G).$$

为证明定理，需作两点准备。

引理2.5 设 $v:I^p\to B$，$z:I^q\to F$ 分别是 B 与 F 上的广义方体。则存在 X 上的广义方体 $u=\xi(v,z):I^{p+q}\to X$，使得

(i) $w(u)\leqslant p$;

(ii) $B_pu=v$，$F_pu=z$;

(iii) 当 $1\leqslant i\leqslant p$，$\lambda^{\varepsilon}_{p+i}u=\xi(v,\lambda^{\varepsilon}_i z)$，$\varepsilon=0$ 或 1;

(iv) 如 z 是退化的，则 u 亦然。

证明 对 $\dim z=q\geqslant 0$ 作归纳法。

设 $q=0$，即 z 是点 $x_0\in F$。我们对任一个广义方体 $v:I^p\to B$ 来定义广义方体 $u=\xi(v,z):I^p\to X$，使得 $\omega u=v$。

记 $V_0=(0,\cdots,0)\in I^p$。因 ω 是纤维映射，V_0 是 I^p 的强形变收缩核，根据定理 Ⅳ.1.2，有映射 $\eta:I^p\to X$，使得 $\eta(V_0)=x_0$，$\omega\eta=v$。设 V_j 是 I^p 的其余顶点。因 $v(V_j)=b_0$，$\omega\eta=v$，知 $\eta(V_j)\in F$。命 $\sigma_j:(I,(0),(1))\to(F,\eta(V_j),x_0)$，为路径连通空间 F 中的路径。如记 J 为 I^p 的顶点集，便有同伦 $g_t:I^p\to B$，$\widetilde{f}_t:J\to X$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使得

$$g_t=v,\qquad \widetilde{f}_t(V_j)=\sigma_j(t).$$

可见 $\omega\widetilde{f}_t=g_t|J, t\in I$ 及 $\widetilde{f}_0=\eta|J$。再由定理Ⅳ.1.2，存在同伦 $f_t:I^p\to X$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使得 $\omega f_t=g_t$，$\widetilde{f}_t=f_t|J$，$f_0=\eta$。

命 $u=f_1:I^p\to X$，则 $u=\xi(v,z)$ 是 X 上的 p 维广义方体，它

将 I^p 的顶点映射至 x_0，即 $u\in Q_p(X)$，且 $\omega u=v$。可见引理对 $q=0$成立。

现在设 $q\geqslant 1$，且假定对所有B上广义方体 v 及F上广义方体 z，$\dim z\leqslant p-1$时，引理已成立。我们考虑 $v:I^p\to B$，$z:I^q\to F$ 的情形。

（1）当 z 是退化的。即 z 与 I^q 的最后一个坐标无关，知 $\lambda_q^0 z=\lambda_q^1 z$。命

$$u(t_1,\cdots,t_{p+q})=\xi(v,\lambda_q^0 z)(t_1,\cdots,t_{p+q-1}).$$

于是广义方体 $u=\xi(u,z):I^{p+q}\to X$ 适合引理2.5的要求。事实上(i)与(iv)是明显成立的，(ii)也成立。因为

$$\begin{aligned}B_p u(t_1,\cdots,t_p)&=\omega u(t_1,\cdots,t_p,0,\cdots,0)\\&=\omega\xi(v,\lambda_q^0 z)(t_1,\cdots,t_p,0,\cdots,0)\\&=v(t_1,\cdots,t_p),\\F_p u(t_1,\cdots,t_q)&=u(0,\cdots,0,t_1,\cdots,t_q)\\&=\xi(v,\lambda_q^0 z)(0,\cdots,0,t_1,\cdots,t_{q-1})\\&=\lambda_q^0 z(t_1,\cdots,t_{q-1})=z(t_1,\cdots,t_q).\end{aligned}$$

对于(iii)同样也是成立的。因为如 $i=q$，有

$$\begin{aligned}\lambda_{p+q}^\varepsilon u(t_1,\cdots,t_{p+q-1})&=u(t_1,\cdots,t_{p+q-1},\varepsilon)\\&=\xi(v,\lambda_q^\varepsilon z)(t_1,\cdots,t_{p+q-1}),\qquad \varepsilon=0\text{ 或 }1.\end{aligned}$$

如 $i<q$，有

$$\begin{aligned}\lambda_{q+i}^\varepsilon u(t_1,\cdots,t_{p+q-1})&=u(t_1,\cdots,t_{p+i-1},\varepsilon,t_{p+i},\cdots,t_{p+q-1})\\&=\xi(v,\lambda_q^0 z)(t_1,\cdots,t_{p+i-1},\varepsilon,t_{p+i},\cdots,t_{p+q-2})\\&=\lambda_{p+i}^\varepsilon\xi(v,\lambda_q^0 z)(t_1,\cdots,t_{p+q-2})\\&=\xi(v,\lambda_i^\varepsilon\lambda_q^0 z)(t_1,\cdots,t_{p+q-2}).\end{aligned}$$

同时，因 $i<q$，v 退化，知 $\lambda_i^\varepsilon z$ 退化，有

$$\begin{aligned}\xi(v,\lambda_i^\varepsilon z)(t_1,\cdots,t_{p+q-1})&=\xi(v,\lambda_i^\varepsilon z)(t_1,\cdots,t_{p+q-2},0)\\&=\lambda_{p+q-1}^0\xi(v,\lambda_i^\varepsilon z)(t_1,\cdots,t_{p+q-2})\\&=\xi(v,\lambda_{q-1}^0\lambda_i^\varepsilon z)(t_1,\cdots,t_{p+q-2}).\end{aligned}$$

根据引理1.1，有

$$\lambda_i^\varepsilon \lambda_q^0 z = \lambda_{q-1}^0 \lambda_i^\varepsilon z,$$

从而

$$\lambda_{p+i}^\varepsilon u = \xi(v, \lambda_q^\varepsilon z), \quad \varepsilon = 0 \text{ 或 } 1.$$

总之，在 z 是退化的情形，引理对 $\dim z = q$ 成立。

（2）当 z 是非退化的。仍记 $V_0 = (0, \cdots, 0) \in I^p$，命

$$\widetilde{J} = V_0 \times I^q \cup I^q \times \partial I^q.$$

容易验证 $\widetilde{J}$ 是可缩的，因而它是 I^{p+q} 的强形变收缩核。命 $g: I^{p+q} \to B$，使得

$$g(t_1, \cdots, t_p, s_1, \cdots, s_q) = v(t_1, \cdots, t_p);$$

及 $\widetilde{f}: \widetilde{J} \to X$，使得

在 $V_0 \times I^q$ 上，$\widetilde{f}(0, \cdots, 0, s_1, \cdots, s_q) = z(s_1, \cdots, s_q)$，

在 $I^p \times \partial I^q$ 上，

$\widetilde{f}(t_1, \cdots, t_p, s_1, \cdots, s_{i-1}, \varepsilon, s_i, \cdots, s_{q-1})$

$= \xi(v, \lambda_i^\varepsilon z)(t_1, \cdots, t_p, s_1, \cdots, s_{q-1})$，$\varepsilon = 0$ 或 1.

显然 $\widetilde{f}$ 是单值的。根据引理Ⅰ.1.2（粘接引理），它是连续的，且 $\omega \widetilde{f} = g | \widetilde{J}$。运用关于纤维映射的定理Ⅳ.1.2，存在映射 u: $I^{p+q} \to X$，使得 $\omega u = g$，$u | \widetilde{J} = \widetilde{f}$。因 $g \geqslant 1$，$\widetilde{J}$ 包含 I^{p+q} 的所有顶点，因之广义方体 $u = \xi(v, z) \in Q_n(X)$。易验证适合引理2.5的要求 (i) — (iv)。现在归纳步骤完成。】

引理2.6 设 $u: I^{p+q} \to X$ 是 X 上的广义方体，其重量 $w(u) \leqslant p$。则存在 X 上的广义方体 $u' = D_p(u): I^{p+q+1} \to X$，使得

(i) $w(u') \leqslant p$；

(ii) $B_p u' = B_p u$；

(iii) $u'(0, \cdots, 0, t, t_1, \cdots, t_q) = u(0, \cdots, 0, t_1, \cdots, t_q)$；

(iv) $\lambda_{p+1}^0 u' = u$，$\lambda_{p+1}^1 u' = \xi(B_p u, F_p u)$，其中对应 ξ 见引理2.5；

(v) 当 $i > p$，$\lambda_{i+1}^\varepsilon u' = D_p(\lambda_i^\varepsilon u)$，$\varepsilon = 0$ 或 1；

(vi) 当 $q > 0$，u 是退化的，则 u' 亦然。

证明　类似引理2.5，对$q\geqslant 0$作归纳法。

设 $q=0$。记

$$V_0=(0,\cdots,0)\in I^p,\quad I^{p+1}=I^p\times I,$$

$$J=(I^p\times(0))\cup(I^p\times(1))\cup(V_0\times I)\subset I^{p+1}.$$

容易验证J是I^{p+1}的强形变收缩核。命$g:I^{p+1}\to B$，使得

$$g(t_1,\cdots,t_p,t)=\omega(u)(t_1,\cdots,t_p),$$

及$\widetilde{f}:J\to X$，使得

$$\widetilde{f}(t_1,\cdots,t_p,t)=\begin{cases}u(t_1,\cdots,t_p), & \text{当 } t=0,\\ \xi(B_pu,F_pu)(t_1,\cdots,t_p), & \text{当 } t=1,\\ x_0, & \text{当 } (t_1,\cdots,t_p)=V_0.\end{cases}$$

因ω是纤维映射，根据定理Ⅳ.1.2,存在映射$u':I^{p+1}\to X$，使得$\omega u'=g,u'|J=\widetilde{f}$。因$J$包含$I^{p+1}$的所有顶点，故广义方体$u'\in Q_{p+1}(X)$。显然，当命$D_pu=u'$，则适合引理2.5的要求(i)—(vi)。

设$q\geqslant 1$，且假定对所有X上的广义方体u，只要$w(u)\leqslant p$，$\dim u\leqslant p+q-1$，适合引理的D_pu已有定义。我们来考虑$u:I^{p+q}\to X$，$w(u)\leqslant p$的情形。

（1）当u是退化的，即u与I^{p+q}的最后一个坐标无关。知

$$\lambda^0_{p+q}u(t_1,\cdots,t_{p+q-1})=u(t_1,\cdots,t_{p+q-1},t_{p+q})$$
$$=\lambda^1_{p+q}u(t_1,\cdots,t_{p+q-1}).$$

命

$$u'(t_1,\cdots,t_{p+q+1})=D_p\lambda^0_{p+q}u(t_1,\cdots,t_{p+q}),$$

于是广义方体$u'=D_pu:I^{p+q+1}\to X$便适合引理的要求。

（2）当u是非退化的。仍记

$$V_0=(0,\cdots,0)\in I^p,\quad I^{p+q+1}=I^p\times I\times I^q,$$

及

$$\widetilde{J}=(I^p\times(0)\times I^q)\cup(I^p\times(1)\times I^q)$$
$$\cup(V_0\times I\times I^q)\cup(I^p\times I\times\partial I^q).$$

容易验证$\widetilde{J}$是I^{p+q+1}的强形变收缩核。命$g:I^{p+q+1}\to B$，使得

$$g(t_1,\cdots,t_p,t,s_1,\cdots,s_q)=B_p u(t_1,\cdots,t_p),$$

及$\widetilde{f}:\widetilde{J}\to X$，使得

$$\widetilde{f}(t_1,\cdots,t_p,0,s_1,\cdots,s_q)=u(t_1,\cdots,t_p,s_1,\cdots,s_q),$$
$$\widetilde{f}(t_1,\cdots,t_p,1,s_1,\cdots,s_q)=\xi(B_p u,F_p u)(t_1,\cdots,t_p,s_1,\cdots,s_q),$$
$$\widetilde{f}(0,\cdots,0,t,s_1,\cdots,s_q)\quad=F_p u(s_1,\cdots,s_q),$$
$$\widetilde{f}(t_1,\cdots,t_p,t,s_1,\cdots,s_{i-1},\varepsilon,s_i,\cdots,s_{q-1})$$
$$=B_p\lambda_{p+i}^{\varepsilon}u(t_1,\cdots,t_p,t,s_1,\cdots,s_{q-1}),\quad \varepsilon=0\text{ 或 }1.$$

因ω是纤维映射，由定理Ⅳ.1.2，存在映射$u':I^{p+q+1}\to X$，使得$\omega u'=g$，$u'|\widetilde{J}=\widetilde{f}$。因$\widetilde{J}$包含$I^{p+q+1}$的所有顶点，知$u'\in Q_{p+q+1}(X)$。命$u'=D_p u$。容易验证引理所要求的性质(i)—(vi)成立。现在归纳步骤完成.】

有了上述准备，我们来证明定理2.4。

根据同态$\chi_{p,q}$的定义，欲证$E_{p,q}\approx C_p(B)\otimes H_q(F,G)$，只须构造链映射

$$\mu:K_m^p=C_p(B)\otimes C_q(F,G)\to\hat{A}_m^p=A_m^p/A_m^{p-1}\,(m=p+q),$$

使得$\theta\mu=1$（恒同）及$\mu\theta\simeq1$（恒同）。为此，对K_m^p的任意生成元$v\otimes z\otimes g$，命

$$\mu(v\otimes z\otimes g)=[\xi(v,z)]\otimes g,$$

其中$[\xi(v,z)]\in C_m^p(X)=C_m(X)\cap C^p(X)$（引理2.5性质(i)）。再作线性扩充，根据引理2.5性质(ii)与(iv)，得到同态

$$\mu:K_m^p\to\hat{A}_m^p,$$

且$\theta\mu=1$（恒同）。由引理2.5性质(iii)，它是链映射。

现在证明$\mu\theta\simeq1$（恒同）$:\hat{A}_m^p\to\hat{A}_m^p$。对于$u\in Q_{p+q}(X)$，$w(u)\leqslant p$，记$ku=(-1)^p D_p u\in Q_{p+q+1}(X)$。由引理2.6性质，经线性扩充$k$导出同态

$$k:\hat{A}_m^p\to\hat{A}_m^p,$$

它是链映射。因为

$$\begin{aligned}\partial(ku)+k(\partial u) &= \sum_{i=p+1}^{m+1}(-1)^{i+p}(\lambda_i^0 D_p u-\lambda_i^1 D_p u)\\ &\quad+\sum_{i=p+1}^{m}(-1)^{i+p}(D_p\lambda_i^0 u-D_p\lambda_i^1 u)\\ &=(-1)^{2p+1}(\lambda_{p+1}^0 D_p u-\lambda_{p+1}^1 D_p u)\\ &=\xi(B_p u,F_p u)-u=\mu\theta(u)-u.\end{aligned}$$

可见 $\mu\theta\simeq 1:\hat{A}_m^p\to\hat{A}_m^p$.】

现在我们计算 $E_{p,q}^{(2)}$。首先我们考虑基本群 $\pi_1(B,\ b_0)$在 $H_q(F,G)$ 上的作用。

设有迴路映射$\sigma:(I,\partial I)\to(B,b_0)$，$[\sigma]\in\pi_1(B,b_0)$。

引理 2.7 对每一个方体 $u\in Q_n(F)$，存在广义方体 $\Delta_\sigma(u)\in Q_{n+1}(X)$，使得

(i) $\lambda_1^0\Delta_\sigma(u)=u$;

(ii) $\omega\Delta_\sigma(u)(t,t_1,\cdots,t_n)=\sigma(t)$;

(iii) $\Delta_\sigma\lambda_i^\varepsilon u=\lambda_{i+1}^\varepsilon\Delta_\sigma u$,　　$\varepsilon=0$ 或 1,

(iv) 如 u 是退化的，则$\Delta_\sigma u$亦然。

证明 因 $\sigma\in Q_1(B)$，对于 $u\in Q_n(F)$，命 $\Delta_\sigma(u)=\xi(\sigma,u)$，其中 ξ 见引理2.5。则 $\Delta_\sigma(u)$ 是X上 $(n+1)$ 维广义方体。显然，引理2.5的性质蕴涵着引理2.7的性质 (i) — (iv)。】

由此，经线性扩充，导出同态

$$\Delta_\sigma:Q_n(F)\to Q_{n+1}(F),$$

及同态

$$\Delta_\sigma:C_n(F)\to C_{n+1}(F).$$

再由 $J_\sigma(u)=\lambda_1^1\Delta_\sigma(u)$ 给出一个同态

$$J_\sigma:Q_n(F)\to Q_n(F).$$

事实上，对于 $(t_1,\cdots,t_n)\in I^n$，有

$$\omega J_\sigma(u)(t_1,\cdots,t_n)=\omega\Delta_\sigma(u)(1,t_1,\cdots,t_n(=\sigma(1)=b_0,$$

即 $J_\sigma(u)(t_1,\cdots,t_n)\in F$。

由引理2.7性质（iv），J_σ 导出同态

$$J_\sigma: C_n(F)\to C_n(F).$$

一般地，有

$$J_\sigma: C_n(F,G)\to C_n(F,G).$$

且进一步，由

$$\begin{aligned}\partial\Delta_\sigma(u) &= \lambda_1^0\Delta_\sigma(u)-\lambda_1^1\Delta_\sigma(u)\\ &\quad+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i[\lambda_i^1\Delta_\sigma(u)-\lambda_i^0\Delta_\sigma((u)]\\ &=u-J_\sigma(u)-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i[\Delta_\sigma\lambda_i^1(u)-\Delta_\sigma\lambda_i^0(u)]\\ &=u-J_\sigma(u)-\Delta_\sigma\partial(u).\end{aligned}$$

即

$$u-J_\sigma(u)=\partial\Delta_\sigma(u)+\Delta_\sigma\partial(u).$$

可见 J_σ 是链映射。故导出同态

$$J_\sigma^*: H_n(F,G)\to H_n(F,G).$$

引理2.8 设 $\sigma\simeq\tau:(I,\ \partial I)\to(B,\ b_0)$，则

$$J_\sigma\simeq J_\tau: C_n(F,G)\to C_n(F,G).$$

即当 $[\sigma]=[\tau]\in\pi_1(B,\ b_0)$，$J_\sigma^*=J_\tau^*$。

证明 因 $\sigma\simeq\tau:(I,\ \partial I)\to(B,\ b_0)$，存在 B 上二维广义方体 $v: I^2\to B$，使得

$$v(0,t)=b_0=v(1,t),\quad v(t,0)=\sigma(t),\quad v(t,1)=\tau(t).$$

对于 F 上每一个 n 维广义方体 $u: I^n\to F$，联系 X 上的 $(n+2)$ 维广义方体 $\Omega(u): I^{n+2}=I\times I\times I^n\to X$，适合下述性质：

(i) $w(\Omega(u))\leqslant 2$；

(ii) $B_2\Omega(u)=v$；

(iii) $\lambda_1^0\Omega(u)(t,\ t_1,\ \cdots,\ t_n)=u(t_1,\ \cdots,\ t_n)$；

(iv) $\lambda_2^0\Omega(u)=\Delta_\sigma(u)$，　　$\lambda_2^1\Omega(u)=\Delta_\tau(u)$；

(v) $\Omega(\lambda_i^\varepsilon u)=\lambda_{i+2}^\varepsilon\Omega(u)$,　　$\varepsilon=0$ 或 1；

(vi) 如 u 是退化的，则 $\Omega(u)$ 亦然。

事实上，仿引理 2.5 与 2.6，对 $\dim u=n\geqslant 0$ 作归纳法。

设 $n=0$，即 u 是点 $x_0\in X$。记

$$J=(I\times(0))\cup(I\times(1))\cup((0)\times I)\subset I^2,$$

知 J 是 I^2 的强形变收缩核。命 $\widetilde{f}:J\to X$ 为映射，使得

$$\widetilde{f}(t,0)=\Delta_\sigma u(t),\quad \widetilde{f}(t,1)=\Delta_\tau u(t),\quad f(0,t)=x_0.$$

因 $\omega\widetilde{f}=u|J$，根据定理 Ⅳ.1.2，$\widetilde{f}$ 有扩充映射 $f:I^2\to X$，使得 $\omega f=u$。我们定义 $\Omega(u)=f$，则引理的性质明显成立。

设 $n\geqslant 1$，且对 F 上维数小于 n 的广义方体 u，适合引理的 $\Omega(u)$ 已有定义。现在考虑 $u:I^n\to F$。

（1）如 u 是退化的。

命 $\Omega(u):I^{n+2}\to X$，使得

$$\Omega(u)(s,t,t_1,\cdots,t_n)=\Omega\lambda_n^0 u(s,t,t_1,\cdots,t_{n-1})$$

便可。

（2）如 u 是非退化的。

记 $\widetilde{J}=(I\times(0)\times I^n)\cup(I\times(1)\times I^n)\cup((0)\times I\times I^n)\cup(I\times I\times\partial I^n)\subset I^{n+2}$，它是 I^{n+2} 的强形变收缩核。

命 $g:I^{n+2}\to B$ 为映射，使得

$$g(s,t,t_1,\cdots,t_n)=v(s,t)$$

及 $\widetilde{f}:\widetilde{J}\to X$ 为映射，使得

$$\widetilde{f}(s,0,t_1,\cdots,t_n)=\Delta_\sigma u(s,t_1,\cdots,t_n),$$
$$\widetilde{f}(s,1,t_1,\cdots,t_n)=\Delta_\tau u(s,t_1,\cdots,t_n),$$
$$\widetilde{f}(0,t,t_1,\cdots,t_n)=u(t_1,\cdots,t_n),$$
$$\widetilde{f}(s,t,t_1,\cdots,t_{i-1},\varepsilon,t_i,\cdots,t_{n-1})=\Omega\lambda_i^\varepsilon u(s,t,t_1,\cdots,t_{n-1}),\quad \varepsilon=0,1.$$

由 $\omega\widetilde{f}=g|\widetilde{J}$，根据定理 Ⅳ.1.2，$\widetilde{f}$ 有扩充映射 $f:I^{n+2}\to X$，使得 $\omega f=g$。定义 $\Omega(u)=f$，则容易验证引理性质 (i)—(vi) 成立。

归纳法步骤完成。

现在定义同态$\vartheta: Q_n(F)\to Q_{n+1}(F)$，使得对$F$上任意$n$维广义方体$u: I^n\to F$，有

$$(\vartheta(u))(t,t_1,\cdots,t_n)=\Omega(u)(1,t,t_1,\cdots,t_n)\in F.$$

由此自然导出同态$\vartheta: C_n(F, G)\to C_{n+1}(F, G)$。且可以验证(细节留给读者)

$$\partial\vartheta(u)+\vartheta\partial(u)=J_\tau(u)-J_\sigma(u).$$

故J_σ与J_τ是链同伦的。 】

于是，对于$[\sigma]\in\pi_1(B,b_0)$，它导出同态

$$J^*_{[\sigma]}: H_n(F,G)\to H_n(F,G),$$

而与代表映射σ的选取无关。且

（1）如$[\sigma]$与$[\tau]\in\pi_1(B,b_0)$，则$J^*_{[\sigma]}J^*_{[\tau]}=J^*_{[\sigma][\tau]}$；

（2）如$[i]\in\pi_1(B,b_0)$是单位元素，则$J^*_{[i]}$是恒同同构.根据定义Ⅰ.4.2，$\pi_1(B,b_0)$是$H_q(F, G)$上的运算群。

关于$E^{(2)}_{p,q}$，类似于定理2.4，有

定理2.9 设$\omega: X\to B$是纤维映射，$b_0\in B$，$x_0\in F=\omega^{-1}(b_0)$，$B$与$F$是路径连通的。且设$\pi_1(B, b_0)$在$H_q(F,G)$上的作用是平凡的，即对一切$q$，任意$[\sigma]\in\pi_1(B,b_0)$，$J^*_{[\sigma]}$是恒同同构。则对于与$\omega$相联系的正合偶$\mathscr{C}(X)=\langle D(X), E(X); i, j, k\rangle$，有

$$\chi=\chi_{p,q}: E^{(2)}_{p,q}\approx H_p(B,H_q(F,G)).$$

证明 考虑定理2.4中的同构

$$\chi=\chi_{p,q}: E_{p,q}=\mathscr{H}_{p+q}(\hat{A}^p)\approx C_p(B)\otimes H_q(F,G).$$

根据定义

$$E^{(2)}_{p,q}=\frac{d: E_{p,q}\to E_{p-1,q}\text{ 的 核}}{d(E_{p+1,q})},\quad d=jk.$$

因此欲证定理，只须指出：$\chi_{p,q}$是链映射，即$\chi d=\partial_B\chi$。其中

$$\partial_B: C_p(B)\otimes H_q(F,G)\to C_{p-1}(B)\otimes H_q(F,G)$$

是以$H_q(F,G)$为系数群的边沿同态。或等价地证明$\partial_B=\chi d\chi^{-1}$。

设 $v\otimes h\in C_p(B)\otimes H_q(F,G)$。记

$$f=\sum_{j=1}^{r} z_j\otimes g_1\in Z_q(F,G)$$

为 $h\in H_q(F,G)$ 的 q 维广义代表闭链，其中 z_j 是 F 上的 q 维广义方体。

命 $u=\sum_{j=1}^{r}\xi(v, z_j)\otimes g_j$ 为 X 上 $(p+q)$ 维广义链，根据 μ 的定义(见定理 2.4 的证明)，u 代表 $\mu(v\otimes f)\in\hat{A}^p_m$ $(m=p+q)$，也代表 $\chi^{-1}(v\otimes h)\in E_{p,q}$。由于当 $i>p$，根据引理 2.5，

$$\lambda_i^\varepsilon\xi(v,z_j)=\xi(v,\lambda_{i-p}^\varepsilon z_j),\quad \varepsilon=0\text{ 或 }1,$$

便有

$$\partial u=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p+q}(-1)^i[\lambda_i^1\xi(v,z_j)-\lambda_i^0\xi(v,z_j)]\otimes g_j$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i[\lambda_i^1\xi(v,z_j)-\lambda_i^0\xi(v,z_j)]\otimes g_j.$$

它是 A^{p-1} 上的闭链，代表 $\hat{A}^{p-1}$ 中的一个闭链。

记 $y=[\partial u]\in E_{p-1,q}=\mathscr{H}_{p+q-1}(\hat{A}^{p-1})$，有

$$y=d\chi^{-1}(v\otimes h).$$

因之，在 $C_{p-1}(B)\otimes C_q(F, G)$ 中，

$$x=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i[B_{p-1}\lambda_i^1\xi(v,z_j)\otimes F_{p-1}\lambda_i^1\xi(v,z_j)-B_{p-1}\lambda_i^0\xi(v,z_j)\otimes F_{p-1}\lambda_i^0\xi(v,z_j)]\otimes g_j$$

就导算子 ∂F 而言，代表 $\chi(y)=\chi d\chi^{-1}(v\otimes h)$。由于

$$B_{p-1}\lambda_i^\varepsilon\xi(v,z_j)=\lambda_i^\varepsilon v,\qquad \varepsilon=0\text{ 或 }1\quad(i\leqslant p),$$

及

$$F_{p-1}\lambda_i^0\xi(u,z_j)(t_1,\cdots,t_q)=\xi(v,z_j)(0,\cdots 0,t_1,\cdots,t_q)=z_j(t_1,\cdots,t_q).$$

如记

$$f_i=\sum_{j=1}^{r} F_{p-1}\lambda_i^1\xi(v,z_j)\otimes g_j\in Z_q(F,G),$$

可见

$$x=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i[\lambda_i^1 v\otimes f_i-\lambda_i^0 v\otimes f].$$

为了决定 $[f_i]\in H_q(F,G)$，命

$$D_i z_j: I^{q+1}\to X,\qquad 1\leqslant j\leqslant r,$$

使得

$$D_i z_j(t,t_1,\cdots,t_q)$$
$$=\xi(v,z_j)(0,\cdots 0,t,0,\cdots 0,t_1,\cdots,t_q),$$

其中 t 在第 i 个位置。又命 $\sigma_i v: I\to B$ 是 B 中的路径，使得

$$\sigma_i v(t)=v(0,\cdots 0,t,0,\cdots 0),$$

其中 t 在第 i 个位置。显然 $[\sigma_i v]\in\pi_1(B,b_0)$，且

$$\omega D_i z_j(t,t_1,\cdots,t_q)=(\sigma_i v)(t).$$

容易验证 $[f_i]=J^*_{[\sigma_i v]}(h)$，其中 $J^*_{[\sigma_i v]}$ 是由路径 $\sigma_i v$ 导出同态：$H_n(F,G)\to H_n(F,G)$。

根据定理假设，$[f_i]=h$。于是

$$\chi d\chi^{-1}(v\otimes g)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i[\lambda_i^1 v\otimes h-\lambda_i^0 v\otimes h]$$
$$=\partial_B(v\otimes h).\quad ▌$$

附记 当 $\pi_1(B, b_0)$ 在 $H_q(F, G)$ 上的作用不是平凡的情形，对 $E^{(n)}_{p,q}$ 亦有类似的同构。此时须用到局部群作系数群，在此从略。

§3 J.-P. Serre 正合叙列

本节及下节考虑纤维空间谱叙列的应用。

本节仍普遍假定 $\omega: X\to B$ 是纤维映射，$b_0\in B$ 及 $F=\omega^{-1}(b_0)$

是路径连通的。

定理3.1　设B是$(m-1)$-连通的，$m\geqslant 1$；F是$(n-1)$-连通的，$n\geqslant 1$。且当$m=1$时，进而假设$\pi_1(B,b_0)$在$H_q(F,G)$上（一切q）的作用是平凡的。则有一个正合叙列（称为 Serre 叙列）

$$H_{m+n-1}(F,G)\xrightarrow{i_*}H_{m+n-1}(X,G)\xrightarrow{\omega_*}H_{m+n-1}(B,G)$$
$$\xrightarrow{d^{(m+n-1)}}H_{m+n-2}(F,G)\xrightarrow{i_*}H_{m+n-2}(X,G)$$
$$\xrightarrow{\omega_*}H_{m+n-2}(B,G)\xrightarrow{d^{(m+n-2)}}H_{m+n-3}(F,G)$$
$$\longrightarrow\cdots\xrightarrow{d^{(2)}}H_1(F,G)\xrightarrow{i_*}H_1(X,G)$$
$$\xrightarrow{\omega_*}H_1(B,G)\longrightarrow 0,$$

其中i_*是由包含映射$i:F\subseteq X$导出的同态，ω_*见纤维映射ω的同伦叙列（定义Ⅳ.3.1），$d^{(p)}$确定的方式同§2中。

证明　根据假设及 Hurewicz 定理Ⅱ.3.5和万有系数定理（参看附录B），有

当$1\leqslant p\leqslant m-1$，$H_p(B)=0$，

当$1\leqslant q\leqslant n-1$，

$$H_q(F,G)\approx H_q(F)\otimes G\oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(F),G)=0.$$

再根据定理2.9及万有系数定理，有

$$E^{(2)}_{p,q}\approx H_p(B,H_q(F,G))\approx H_p(B)\otimes H_q(F,G)$$
$$\oplus\mathrm{Tor}(H_{p-1}(B),\ H_q(F,G)).$$

故对于$p\neq 0$，$q\neq 0$，$p+q\leqslant m+n-1$，$k\geqslant 2$，有

$$E^{(2)}_{p,q}=E^{(k)}_{p,q}=E^{(\infty)}_{p,q}=0.$$

及当$p<0$（或$q<0$)）及$k\geqslant 2$有 $E^{(k)}_{p,q}=0$。而

$$E^{(2)}_{p,0}\approx H_p(B,H_0(F,G))\approx H_p(B,G),$$
$$E^{(2)}_{0,q}\approx H_0(B,H_q(F,G))\approx H_q(F,G).$$

于是，对于$2\leqslant p\leqslant m+n-1$，因

$$E^{(k+1)}_{p,q}=\frac{d^{(k)}:E^{(k)}_{p,q}\to E^{(k)}_{p-k,q+k-1}\text{ 的核}}{d^{(k)}:(E^{(k)}_{p+k,q-k+1})}\quad(k\geqslant 2)$$

（看§2），知

$$E_{p,0}^{(2)}=E_{p,0}^{(3)}=\cdots=E_{p,0}^{(p)},$$

$E_{p,0}^{(\infty)}=E_{p,0}^{(p+1)}$ 为同态 $d^{(p)}:E_{p,0}^{(p)}\to E_{0,p-1}^{(p)}$ 的核，

及

$$E_{1,0}^{(2)}=E_{1,0}^{(3)}=\cdots=E_{1,0}^{(\infty)}.$$

类似地，对于 $1\leqslant q\leqslant m+n-2$，有

$$E_{0,q}^{(2)}=E_{0,q}^{(3)}=\cdots=E_{0,q}^{(q+1)},$$

$$E_{0,q}^{(\infty)}=E_{0,q}^{(q+2)}=E_{0,q}^{(q+1)}/d^{(q+1)}(E_{q+1,0}^{(q+1)})$$

及当 $q=m+n-1$，$E_{0,q}^{(\infty)}$ 同构于 $E_{0,q}^{(2)}$ 上的一个商群。

由Ⅴ. § 2 与 § 3 知

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)/\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A)\approx E_{p,q}^{(\infty)}.$$

其中

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)\approx(i)^{q+1}(D_{p,q})\subseteq D_{p+q+1,-1}$$

$$=\mathscr{H}_{p+q}(A^{p+q+1})\approx\mathscr{H}_{p+q}(A).$$

设 $2\leqslant p\leqslant m+n-1$，则

$$\mathscr{H}_{p,0}(A)/\mathscr{H}_{p-1,1}(A)\approx E_{p,0}^{(\infty)},$$

$$\mathscr{H}_{p-1,1}(A)/\mathscr{H}_{p-2,2}(A)\approx E_{p-1,1}^{(\infty)}=0,$$

$$\mathscr{H}_{p-2,2}(A)/\mathscr{H}_{p-3,3}(A)\approx E_{p-2,2}^{(\infty)}=0,$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{H}_{1,p-1}(A)/\mathscr{H}_{0,p}(A)\approx E_{1,p-1}^{(\infty)}=0.$$

$$\mathscr{H}_{0,p}(A)/\mathscr{H}_{-1,p+1}(A)\approx E_{0,p}^{(\infty)}.$$

但是 $\mathscr{H}_{-1,p+1}(A)\approx(i)^{p+2}(D_{-1,p+1})=0$（因 $D_{-1,p+1}=0$），$\mathscr{H}_{p,0}(A)=\mathscr{H}_p(A)$ 及 $\mathscr{H}_{0,p}(A)\subseteq\mathscr{H}_p(A)$。于是，对于 $2\leqslant p\leqslant m+n-1$，有正合叙列

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&\mathscr{H}_{0,p}(A)&\longrightarrow&\mathscr{H}_{p,0}(A)&\longrightarrow&E_{p,0}^{(\infty)}&\longrightarrow&0,\\&&\uparrow\approx&&&&&&\\&&E_{0,p}^{(\infty)}&&&&&&\end{array}$$

且 $E_{p,0}^{(\infty)}$ 是同态 $d^{(p)}:E_{p,0}^{(p)}=E_{p,0}^{(2)}\longrightarrow E_{0,p-1}^{(p)}=E_{0,p-1}^{(2)}$ 的核及 $E_{0,p-1}^{(\infty)}=E_{0,p-1}^{(p)}/d^{(p)}(E_{p,0}^{(p)})$；特别地，当 $p=m+n-1$，有自然的在上同态：$E_{0,p}^{(2)}\to E_{0,p}^{(\infty)}=\mathscr{H}_{0,p}(A)$。

结合上述，便得到正合叙列

$$E^{(2)}_{0,m+n-1}\longrightarrow\mathscr{H}_{m+n-1}(A)\longrightarrow E^{(2)}_{m+n-1,0}\xrightarrow{d^{(m+n-1)}}E^{(2)}_{0,m+n-2}\longrightarrow\mathscr{H}_{m+n-2}(A)\longrightarrow\cdots\longrightarrow E^{(2)}_{0,1}\longrightarrow\mathscr{H}_1(A)\longrightarrow E^{(2)}_{1,0}\longrightarrow 0.$$

用空间的同调群表示，即有正合叙列

$$H_{m+n-1}(F,G)\xrightarrow{i_*}H_{m+n-1}(X,G)\xrightarrow{\omega_*}H_{m+n-1}(B,G)\xrightarrow{d^{(m+n-1)}}H_{m+n-2}(F,G)\longrightarrow\cdots\xrightarrow{d^{(2)}}H_1(F,G)\xrightarrow{i_*}H_1(X,G)\xrightarrow{\omega_*}H_1(B,G)\longrightarrow 0.$$

叙列中的同态 $H_p(F,G)\to H_p(X,G)$ 是由包含映射 $i:F\subseteq X$ 导出的。事实上

$$\mathscr{H}_{0,p}(A)\approx(i)^{p-1}\mathscr{H}_p(A^p)\to\mathscr{H}_{p,0}(A)=i(\mathscr{H}_p(A^p))$$

是由包含映射 $A^0=\sum_k C_k(F,G)\subseteq A^p$ 导出的。叙列中的同态 $H_p(X,G)\to H_k(B,G)$ 是由纤维映射 $\omega:X\to B$ 导出的。事实上，设此同态为 η，考虑特殊的 B 上恒同(纤维)映射 $1:B\to B$，b_0 处的纤维是 $\{b_0\}$，显然 $\{b_0\}$ 是 $(n-1)$-连通的。如上述得到正合叙列

$$\cdots\longrightarrow H_p(\{b\},G)\longrightarrow H_p(B,G)\xrightarrow{1_*}H_p(B,G)\longrightarrow H_{p-1}(\{b\},G)\longrightarrow\cdots,\qquad 1\leqslant p\leqslant m+n-1,$$

其中 1_* 是恒同同构。

根据交换性在图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\omega} & B\\ {\scriptstyle\omega}\downarrow & & \|\\ B & \xrightarrow{1} & B\end{array}$$

中成立，故 ω 导出与纤维映射 $\omega:X\to B$ 及 $1:B\to B$ 相联系的正合

偶间的同态（见V．§3）．

由是交换性在图表

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,G) & \xrightarrow{\eta} & H_p(B,G) \\ \downarrow \omega_* & & \| \\ H_p(B,G) & \xrightarrow{1_*} & H_p(B,G) \end{array} \qquad (1\leqslant p\leqslant m+n-1)$$

中成立。故 $\eta=\omega_*$。】

推论3.2 假设同定理3.1，则 $\omega:X\to B$ 导出的同态

$$\omega_*:H_p(X,F;G)\to H_p(B,(b_0);G),$$

当 $2\leqslant p\leqslant m+n$ 是在上的；当 $2\leqslant p\leqslant m+n-1$ 是同构。

证明 考虑由两个正合叙列的部份组成的图表，对于 $2\leqslant p\leqslant m+n-1$，即

$$\begin{array}{ccccc} H_p(F,G) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X,G) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X,F;G) \\ \| & & \| & (\triangle_1) & \downarrow \omega_* \\ H_p(F,G) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X,G) & \longrightarrow & H_p(B,G) \\ & & & & \| \\ & & & & H_p(B,(b_0);G) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{(接上行)} \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(F,G) & \xrightarrow{i_*} & H_{p-1}(X,G) \\ (\triangle_2) & \| & & \| \\ \text{(接下行)} \longrightarrow & H_{p-1}(F,G) & \xrightarrow{i_*} & H_{p-1}(X,G) \end{array}$$

其中上面的一个叙列是空间偶（X,F）的同调叙列。

交换性在$(\triangle_1)$中成立。事实上，因为交换性在图表

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,G) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X,F;G) \\ \downarrow \omega_* & & \downarrow \omega_* \\ H_p(B,G) & \longrightarrow & H_q(B,(b_0);G) \end{array}$$

中显然成立。

交换性在$(\triangle_2)$中成立。事实上，设$[a_p]\in C_p(X,F;G)$，使得$\partial[a_p]=0$，其中$a_p\in C_p(X,G)\subseteq A^p$，则$a_p$代表$\hat{A}^p=A^p/A^{p-1}$中的一个元素；而$\partial a_p\in C_{p-1}(F,G)\subseteq A^0$，从而$a_p$代表一个元素$a_p'\in E_{p,0}$，且$d(a_p')=jk(a_p')=0$；由是$a_p$代表一个元素$a_p\in E_{p,0}^{(2)}$。类似地，$\partial a_p$代表一个元素$a_{p-1}\in E_{0,p-1}^{(2)}$。因$E_{p,0}^{(2)}=E_{p,0}^{(p)}, E_{0,p-1}^{(2)}=E_{0,p-1}^{(p)}$，可以验证$d^p(a_p)=a_{p-1}$。注意到$\omega_*[a_p]=\chi(a_p)$，其中$\chi$见定理2.9。故交换性在$(\triangle_2)$中成立。

于是，根据群论中正合叙列间同态的“五引理”（详见本节末），有

$$\omega_*:H_p(X,F;G)\approx H_p(B,G),\quad 2\leqslant p\leqslant m+n-1.$$

余下，证明当$p'=m+n$时，ω_*是在上的。事实上，如前对任意$[a_{p'}]\in C_{p'}(X,F;G)$，使得$\partial[a_{p'}]=0$，它代表一个元素$a_{p'}\in E_{p',0}^{(2)}$。这给出一个同态

$$\eta:H_{p'}(X,F;G)\to E_{p',0}^{(2)}.$$

因$\partial a_{p'}\in C_{p'-1}(F,G)$，可以验证

$$\eta(H_{p'}(X,F;G))=E_{p',0}^{(p')}.$$

而由前所述，对于$2\leqslant k\leqslant p'-1$，有

$$E_{p',0}^{(k+1)}=d^{(k)}:E_{p',0}^{(k)}\to E_{p'-k,k-1}^{(k)}\text{的核}=E_{p',0}^{(k)},$$

知$E_{p',0}^{(p')}=E_{p',0}^{(2)}$。

从交换性图表

$$\begin{array}{ccc} H_{p'}(X,F;G) & \xrightarrow{\eta} & E_{p',0}^{(2)} \\ & {\scriptstyle\omega_*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\chi} & \\ & H_{p'}(B,H_0(F,G))=H_{p'}(B,G), & \end{array}$$

知$\omega_*(H_{p'}(X,F;G))=H_{p'}(B,G)$。】

推理3.3　假设B是m-连通空间，$m\geqslant 1$，X是可缩成一点的空间。则F是$(m-1)$-连通的，且同态$\omega_*:H_p(X,F)\to H_p(B)$，当$2\leqslant p\leqslant 2m+1$是在上的；当$2\leqslant p\leqslant 2m$是同构。

证明　从假设及纤维映射ω的同伦正合叙列即得到F的$(m-1)$-连通性。

其余结论见推论3.2。 】

附记 关于群论中正合叙列间同态的“**五引理**”如下：

设A, B, C, D, E, …; A', B', C', D', E', …均为交换群。且设有两个正合叙列组成的图表

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 & \\ \cdots \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

其中α_i ($i=1, 2, \cdots$) 是群同态，使上述图表交换。则如果α_1，α_2，α_4，α_5是同构，α_3亦然。一般地，(i) 如α_1是在上的，α_2与α_4是单同态，则α_3是单同态；(ii) 如α_5是单同态，α_2与α_4是在上的，则α_3是在上的。

证明 显然(i)与(ii)蕴涵着当α_1，α_2，α_4，α_5是同构，则α_3是同构。故只须证(i)与(ii)。

我们先证(i)，注意图表

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\xi} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \xrightarrow{\sigma} & D \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 \\ A' & \xrightarrow{\xi'} & B' & \xrightarrow{\eta'} & C' & \xrightarrow{\sigma'} & D'. \end{array}$$

我们证明$\ker \alpha_3=0$。

设$c\in C$，使$\alpha_3(c)=0$。由图表交换性，知

$$\alpha_4\sigma(c)=\sigma'\alpha_3(c)=0,$$

因α_4是单同态，$\sigma(c)=0$。故有$b\in B$，使$\eta(b)=c$。因

$$\eta'\alpha_2(b)=\alpha_3\eta(b)=\alpha_3(c)=0,$$

有$a'\in A'$，使得$\xi'(a')=\alpha_2(b)$。再由α_1的在上性，有$a\in A$，$\alpha_1(a)=a'$。于是，根据

$$\eta(b-\xi(a))=\eta(b)-\eta\xi(a)=\eta(b)=c,$$

$$\alpha_2(b-\xi(a))=\alpha_2(b)-\alpha_2\xi(a)=\alpha_2(b)-\xi'\alpha_1(a)=0,$$

及α_2是单同态，知$b=\xi(a)$，$c=0$。

(ii)的证法同(i)，留给读者。 】

§4　Gysin 叙列，王宪钟叙列

本节由纤维映射的谱叙列再给出两个重要的正合同调叙列，即 1941 年 W• Gysin 提出的 Gysin 叙列[16]，1949年王宪钟（H• C• Wang）提出的王叙列[28]。

定理4.1　设 $\omega: X\to B$ 是纤维映射，B 为路径连通空间，$b_0\in B$。且设$F=\omega^{-1}(b_0)$ 路径连通且与一个 n 维球 S^n 具有同构的（整系数）同调群（因而亦称同调 n 维球），$n\geqslant 1$。又设 $\pi_1(B, b_0)$在$H_q(F)$ 上的作用是平凡的（一切 q）．则有正合叙列

$$\cdots\longrightarrow H_{p+1}(B)\longrightarrow H_{p-n}(B)\longrightarrow H_p(X)$$
$$\xrightarrow{\omega_*} H_p(B)\longrightarrow H_{p-n-1}(B)\longrightarrow\cdots$$

该叙列称为 Gysin 叙列。

证明　考虑纤维映射 $\omega: X\to B$的谱叙列，知

$$E^{(2)}_{p,q}\approx H_p(B,H_q(F))$$
$$\approx H_p(B)\otimes H_q(F)\oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(B),\ H_q(F)).$$

（参看附录 B．§4 万有系数定理）．

因

$$H_q(F)\approx\begin{cases}J, & 对q=0,\ n,\\ 0, & 其余q.\end{cases}$$

及　$\mathrm{Tor}(H_{p-1}(B),\ H_g(F))=0$（看命题 B.2.2），知

$$E^{(2)}_{p,q}\approx\begin{cases}H_p(B), & 对q=0 或 n,\\ 0, & 其余的q.\end{cases}$$

由是，当 $q\neq 0$ 或 n，$k\geqslant 2$，$E^{(k)}_{p,q}=E^{(\infty)}_{p,q}=0$。容易验证

$$E^{(2)}_{p,0}=E^{(3)}_{p,0}=\cdots=E^{(n+1)}_{p,0},$$

$E^{(n+2)}_{p,0}$ 是 $d^{(n+1)}: E^{(n+1)}_{p,0}\to E^{(n+1)}_{p-n-1,n}$ 的核，

$$E_{p,0}^{(n+2)}=E_{p,0}^{(n+3)}=\cdots=E_{p,0}^{(\infty)}.$$

类似地，有

$$E_{p,n}^{(2)}=E_{p,n}^{(3)}=\cdots=E_{p,n}^{(n+1)},$$
$$E_{p,n}^{(n+2)}=E_{p,n}^{(n+1)}/d^{(n+1)}(E_{p+n+1,0}^{(n+1)}),$$

及

$$E_{p,n}^{(n+2)}=E_{p,n}^{(n+3)}=\cdots=E_{p,n}^{(\infty)}.$$

根据命题Ⅴ.3.3，有

$$E_{p,q}^{(\infty)}\approx\mathscr{H}_{p,q}(A)/\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A),$$

其中

$$\mathscr{H}_{p,q}(A)=(i)^{q+1}D_{p,q}\subseteq D_{p+q+1,-1}=\mathscr{H}_{p+q}(A)$$
$$=\mathscr{H}_{p+q}(X)\text{（这里取 }G=J\text{）}.$$

从而

$$\mathscr{H}_{p,0}(A)/\mathscr{H}_{p-1,1}(A)\approx E_{p,0}^{(\infty)},$$
$$\mathscr{H}_{p-1,1}(A)/\mathscr{H}_{p-2,2}(A)\approx E_{p-1,1}^{(\infty)}=0,$$
$$\vdots$$
$$\mathscr{H}_{p-n+1,n-1}(A)/\mathscr{H}_{p-n,n}(A)\approx E_{p-n+1,n-1}^{(\infty)}=0,$$
$$\mathscr{H}_{p-n,n}(A)/\mathscr{H}_{p-n-1,n+1}(A)\approx E_{p-n,n}^{(\infty)},$$

及

$$\frac{\mathscr{H}_{p-n-k,n+k}(A)}{\mathscr{H}_{p-n-k-1,n+k+1}(A)}=E_{p-n-k,n+k}^{(\infty)}=0.\quad(k\geqslant 1).$$

但

$$\mathscr{H}_{p,0}(A)=\mathscr{H}_{p}(A)=H_{p}(X),\qquad \mathscr{H}_{-1,p+1}(A)=0,$$

故

$$\mathscr{H}_{p-1,1}(A)=\mathscr{H}_{p-2,2}(A)=\cdots=\mathscr{H}_{p-n,n}(A),$$
$$\mathscr{H}_{p-n,n+1}(A)=0.$$

于是，有正合叙列

$$0\to E_{p-n,n}^{(\infty)}\to H_{p}(X)\to E_{p,0}^{(\infty)}\to 0,$$

其中 $E_{p,0}^{(\infty)}$是 $d^{(n+1)}:E_{p,0}^{(2)}\to E_{p-n-1,n}^{(2)}$的核，

$$E^{(\infty)}_{p-n,n}=E^{(2)}_{p-n,n}/d^{(n+1)}(E^{(2)}_{p+1,0}).$$

因此，得到正合叙列

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots\to & E^{(2)}_{p+1,0} & \to & E^{(2)}_{p-n,n} & \longrightarrow & H_p(X) & \longrightarrow & E^{(2)}_{p,0} & \longrightarrow & E^{(2)}_{p-n-1,n} & \to\cdots \\
& \approx\downarrow\chi & & \approx\downarrow\chi & & \| & & \approx\downarrow\chi & & \approx\downarrow\chi & \\
\cdots\to & H_{p+1}(B) & \to & H_{p-n}(B) & \to & H_p(X) & \xrightarrow{\omega_*} & H_p(B) & \to & H_{p-n-1}(B) & \to\cdots.
\end{array}$$

定理证毕。∎

附记　同态 $\omega_*:H_p(X)\to H_p(B)$ 是由纤维映射 $\omega:X\to B$ 导出的，证法同定理3.1。

类似地考虑王叙列，即

定理 4.2　设 $\omega:X\to S^n$ 是纤维映射，$n\geqslant 2$，X 是路径连通的。记 $b_0\in S^n$，$F=\omega^{-1}(b_0)$。则存在正合叙列

$$\cdots\to H_{q-n+1}(F)\to H_q(F)\to H_q(X)\to H_{q-n}(F)\to H_{q-1}(F)\to\cdots.$$

该叙列称为**王宪钟叙列**。

证明　根据纤维映射的 CHP，易见 F 是路径连通的。考虑 $\omega:X\to S^n$ 的谱叙列，有

$$\begin{aligned}
E^{(2)}_{p,q}&\approx H_p(S^n,\ H_q(F))\\
&\approx H_p(S^n)\oplus H_q(F)\oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(S^n),H_q(F))\\
&\approx\begin{cases}H_q(F), & \text{对 } p=0 \text{ 或 } n,\\ 0, & \text{其余的}p.\end{cases}
\end{aligned}$$

由于当 $p\neq 0$ 或 n，$k\geqslant 2$，$E^{(k)}_{p,q}=E^{(\infty)}_{p,q}=0$，故

$$E^{(2)}_{0,q}=E^{(3)}_{0,q}=\cdots=E^{(n)}_{0,q},$$

$$E^{(n+1)}_{0,q}=E^{(n)}_{0,q}/d^{(n)}(E^{(n)}_{n,-n+q-1}),$$

$$E^{(n+1)}_{0,q}=E^{(n+2)}_{0,q}=\cdots=E^{(\infty)}_{0,q}.$$

类似地，有

$$E_{n,q}^{(2)}=E_{n,q}^{(3)}=\cdots=E_{n,q}^{(n)},$$

$E_{n,q}^{(n+1)}$ 是 $d^{(n)}:E_{n,q}^{(n)}\longrightarrow E_{0,q+n-1}^{(n)}$ 的核，

$$E_{n,q}^{(n+1)}=E_{n,q}^{(n+2)}=\cdots=E_{n,q}^{(\infty)}.$$

再根据命题Ⅴ3.3

$$E_{p,q}^{(\infty)}\approx\mathscr{H}_{p,q}(A)/\mathscr{H}_{p-1,q+1}(A),$$

有

$$\mathscr{H}_{n,q}(A)/\mathscr{H}_{n-1,q+1}(A)\approx E_{n,q}^{(\infty)},$$

$$\mathscr{H}_{n-1,q+1}(A)=\mathscr{H}_{n-2,q+2}(A)=\cdots=\mathscr{H}_{0,n+q}(A),$$

$$\mathscr{H}_{0,n+q}(A)=\mathscr{H}_{0,n+q}(A)/\mathscr{H}_{-1,n+q+1}(A)\approx E_{0,n+q}^{(\infty)}.$$

故得正合叙列（对任意 q）

$$0\to E_{0,n+q}^{(\infty)}\to\mathscr{H}_{n,q}(A)\to E_{n,q}^{(\infty)}\to 0.$$

但

$$\mathscr{H}_{n+1,q-1}(A)/\mathscr{H}_{n,q}(A)\approx E_{n+1,q-1}^{(\infty)}=0,$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{H}_{n+q,0}(A)/\mathscr{H}_{n+q-1,1}(A)\approx E_{n+q,0}^{(\infty)}=0$$

$$\mathscr{H}_{n+q,0}(A)\approx\mathscr{H}_{n+q}(A)=H_{n+q}(X).$$

从而有正合叙列

$$\cdots\to E_{0,n+q}^{(\infty)}\to H_{n+q}(X)\to E_{n,q}^{(\infty)}\to 0.$$

因此有正合叙列

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots\to & E_{0,q-n+1}^{(2)} & \to & E_{n,q}^{(2)} & \longrightarrow & H_q(X) & \to & E_{0,q-n}^{(2)} & \to & E_{n,q-1}^{(2)} & \to\cdots\\
 & \approx\downarrow\chi & & \approx\downarrow\chi & & \| & & \approx\downarrow\chi & & \approx\downarrow\chi & \\
\cdots\to & H_{q-n+1}(F) & \to & H_q(F) & \to & H_q(X) & \to & H_{q-n}(F) & \to & H_{q-1}(F) & \to\cdots.
\end{array}$$

定理证毕。】

附记 与 Gysin 叙列相仿，从证明可看出，用单连通的同调 n 维球 $B(n\geqslant 2)$ 来代替 S^n，会得到同样的结果。

推论4.3 假设同定理4.2，再设 X 可缩成一点，则

$$H_q(F)\approx\begin{cases}J, & q\equiv 0(\mathrm{mod}(n-1)),\ q\geqslant 0,\\ 0, & \text{其余的}q.\end{cases}$$

证明　由定理4.2及X的可缩性，

$$H_q(F)\approx H_{q-n+1}(F).$$

根据推论3.3，F是$(n-2)$-连通的，知

$$H_0(F)\approx J,\qquad H_1(F)=\cdots=H_{n-2}(F)=0.$$

即得到本推论。】

附记1.　对一般交换群G作系数群的情形类似。

附记2.　同样的考虑，可利用上同调谱叙列（用降标δ-群等。见本章末练习1与2.），得到上同调形式的Gysin叙列与王宪钟叙列。

例如王叙列的情形如下。

定理4.2′　设$\omega:X\to S^n$是纤维映射，$n\geqslant 2$；X是路径连通的；$b_0\in S^n$，$F=\omega^{-1}(b_0)$。则存在正合叙列

$$\cdots\to H^{q-n}(F)\to H^q(X)\to H^q(F)\xrightarrow{\rho}H^{q-n+1}(F)\to H^{q+1}(X)\to\cdots,$$

其中同态$H^q(X)\to H^q(F)$是由包含映射$F\subseteq X$导出的。

且同态$\rho:H^q(F)\to H^{q-n+1}(F)$具有性质：对$X\in H^p(F)$，$y\in H^{p'}(F)$，则

$$\rho(x\vee y)=\rho(x)\vee y+(-1)^{(n+1)p}x\vee\rho(y).$$

其中“$\vee$”是上调环$H^*(F)$中的上积运算（见[1]Ⅵ.§2，注意符号略有不同）。

证明的细节从略，读者可见J.-P. Serre的文章[26]。】

§5　n-连通的纤维空间

本节的内容一方面作为Ⅳ纤维空间理论的补充，一方面为下节计算部分球的同伦群作准备。

定义5.1　设X与B是路径连通空间。纤维映射$\omega:X\to B$称为**n-连通的**$(n\geqslant 1)$，如果X是n-连通的，且对一切$k>n$，$\omega_*:\pi_k(X,e_0)\approx\pi_k(B,b_0)$，其中$b_0\in B$，$e_0\in\omega^{-1}(b_0)$。此时，$X$称为$B$

上的n-连通的纤维空间。

例如，设X是B的万有复叠空间（见定义Ⅳ.6.3），则X是B上的1-连通纤维空间。

为了讨论路径连通空间上的n-连通纤维空间的存在性问题，先叙述下面两个命题。

命题5.1 设B是路径连通的(T_1)空间，$b_0\in B$. 则对任何整数$n\geqslant 1$，存在一个路径连通的(T_1)空间X，具有性质：

（i）B是X的闭子集；

（ii）$\pi_n(X,\ b_0)=0$；

（iii）包含映射$i:B\to X$导出同构

$$i_*:\pi_k(B,\ b_0)\approx\pi_k(X,\ b_0),\quad 1\leqslant k<n.$$

证明 记A为$\pi_n(B,\ b_0)$的元素组成的集合，赋予其离散拓扑。考虑笛卡儿积空间$T=\nabla^{n+1}\times A$及其子空间$S=S^n\times A$，其中∇^{n+1}是$(n+1)$维（实心）球体，$S^n=\partial\nabla^{n+1}$。

对于任意$\alpha\in A$，取定α的代表映射$f_\alpha:(S^n,p_0)\to(B,\ b_0)$. 命$f:S\to B$为映射，使得$f|S^n\times(\alpha)=f_\alpha$。

记$W=T\cup B$，W可看成T与B的拓扑和空间，即$U\subseteq W$是开集，当且仅当$U\cap T$，$U\cap B$分别是T与B的开集。命X是W中将$x\in S$与$f(x)\in B$等同所得的商空间，亦称为由映射$f:S\to B$把T附加到B上的附加空间（见[4] Ⅰ.§7）。显然B是X的闭子集，即性质（i）。

X是路径连通的. 因B是路径连通的，且对任$x\in(\mathrm{Int}\nabla^{n+1})\times(\alpha)$都可路径连通到$S^n\times(\alpha)$上。

现在我们证明X适合性质（ii）与（iii）。

事实上，设∇_0^{n+1}是∇^{n+1}的同心球，且$\nabla_0^{n+1}\subseteq\mathrm{Int}\nabla^{n+1}$. 因$A$具有离散拓扑，知$X$具有性质：如$F$是$X$的紧致子集，则仅有有限个$\alpha\in\pi_n(B,\ b_0)$，使得

$$F\cap(\nabla_0^{n+1}\times(\alpha))\neq\varnothing,$$

从而对任一个映射$g:S^k\to X$，$1\leqslant k\leqslant n$，用单纯逼近方法，$g\simeq$

$g':S^k\to X$，使得 $g'(S^k)\subseteq B$. 且如 $g:S^k\to B$ 可扩充至映射 $\widetilde{g}$：$\nabla^{k+1}\to X$, $1\leqslant k\leqslant n$，则 g 可扩充至映射 $\widetilde{g'}:\nabla^{k+1}\to B$。于是性质（iii）适合。

再设 $f:(S^n, p_0)\to(X, b_0)$ 为映射。由上述讨论不妨设 $f(S^n)\subseteq B$。于是 f 是某一个 $a=[f_a]\in\pi_n(B, b_0)$ 的代表映射。易见 f_a 在 X 上有扩充映射，故知 f 可扩充至映射 $\widetilde{f}:\nabla^{n+1}\to X$。即（ii）成立。

尚余证 X 是 T_1 空间，请读者补出。】

命题5.2 设 B 是路径连通的（T_1）空间，$b_0\in B$。则对任意整数 $n\geqslant1$，存在路径连通的（T_1）空间 X^*，具有性质：

（i）B 是 X^* 的闭子集；

（ii）当 $k>n$, $\pi_k(X^*, b_0)=0$；

（iii）包含映射 $i:B\to X^*$ 导出同构

$$i_*:\pi_k(B, b_0)\approx\pi_k(X^*, b_0), \qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

证明 根据命题5.1，存在一系列路径连通的（T_1）空间

$$B=X_n\subseteq X_{n+1}\subseteq X_{n+2}\subseteq\cdots,$$

其中 X_{n+k} 是 X_{n+k+1} 的闭子集，且

（1）$\pi_{n+k}(X_{n+k}, b_0)=0$, $k\geqslant1$；

（2）包含映射 $i:X_{n+k}\to X_{n+k+1}$ 导出同构

$$i_*:\pi_m(X_{n+k}, b_0)\approx\pi_m(X_{n+k+1}, b_0),\ 1\leqslant m\leqslant n+k,\ k\geqslant0.$$

命 $X^*=\bigcup\limits_{k=0,1,\cdots}X_{n+k}$，在 X^* 上定义拓扑如下：$U\subseteq X^*$ 是开集，当且仅当对每个 $k\geqslant0$, $U\cap X_{n+k}$ 是 X_{n+k} 的开集。于是 $F\subseteq X^*$ 在 X^* 中是闭集，当且仅当对每个 $k\geqslant0$, $F\cap X_{n+k}$ 是 X_{n+k} 的闭集。故每个 X_{n+k}，特别地 $B=X_n$ 是 X^* 的闭集。即性质（i）适合。

易见 X^* 是 T_1 空间。

设 F 是 X^* 的紧致子集，则存在 $k'\geqslant0$，使得 $F\subseteq X_{n+k'}$。事实上，如果不然，在 F 中有叙列 $\{x_j\}$ 及整数叙列 $0\leqslant k_1<k_2<\cdots$,

使得$x_j \in X_{n+k_j+1} - X_{n+k_j}$。因$X^*$是$T_1$的，集合$A_{j'} = \{x_j | j \geqslant j'\}, j' = 1, 2, \cdots$ 是X^*中的闭子集，因而也是F中的闭子集，即为紧致集，而此与有限交性质不适合相矛盾（有限个A'_j的交非空，而$\bigcap_{j'=1,2,\cdots} A_{j'} = \varnothing$）。由此事实，可见

(a) 设K是有限单纯复形，$f: K \to X^*$为映射，则有$j' > 0$，使$f(K) \subseteq X_{n+j'}$；

(b) X^*是路径连通的。

从而可验证命题要求的性质(ii)与(iii)成立（细节从略）】.

现在来叙述并证明本节的主要定理。

定理5.3 设B是路径连通的（T_1）空间，则对任给的整数$n \geqslant 1$，存在n-连通的纤维映射$\omega: X \to B$，其中X是路径连通空间。

证明 设$b_0 \in B$，命X^*是适合命题5.2的路径连通空间，便有

(i) $\pi_k(X^*, b_0) = 0, \ k > n$；

(ii) 包含映射$i: B \to X^*$导出同构

$$i_*: \pi_k(B, b_0) \approx \pi_k(X^*, b_0), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

命$\widetilde{X} = \Omega_{b_0}$是$X^*$上以$b_0$为起点的路径空间（见定义Ⅳ.8.1）；$p: \widetilde{X} \to X^*$为自然投射。则$p$是纤维映射（定理Ⅳ.8.2）。命$X = p^{-1}(B)$；$\omega = p | X: X \to B$。则$\omega$亦是纤维映射。由于$B$，$X^*$与$\widetilde{X}$是路径连通空间，且$i_*: \pi_1(B, b_0) \approx \pi_1(X^*, b_0)$，利用$CHP$，知$X$是路径连通的。

取$e_0 \in \omega^{-1}(b_0)$，今证$\pi_k(X, e_0) = 0, \ 1 \leqslant k \leqslant n$。

事实上，据(X^*, B)的正合同伦叙列，当$1 \leqslant k \leqslant n$，$\pi_{k+1}(X^*, B; b_0) = 0$。于是，因

$$p_*: \pi_{k+1}(X^*, B; b_0) \approx \pi_{k+1}(\widetilde{X}, X; e_0)$$

（见定理Ⅳ.3.1），知

$$\pi_{k+1}(\widetilde{X}, X; e_0) = 0, \ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

因$\widetilde{X}$可缩成一点，再由（$\widetilde{X}$，X）的正合同伦叙列，有

$$\pi_k(X,\ e_0)=0,\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

最后，指出$\omega_*:\pi_k(X,\ e_0)\approx\pi_k(B,\ b_0)$，$k>n$。事实上，注意具有交换性的图表

$$\begin{array}{ccc}\cdots\to\pi_{k+1}(X^*,\ b_0) & \to & \pi_{k+1}(X^*,\ B;\ b_0)\\ \uparrow p_* & & \approx\uparrow p_*\\ \cdots\to\pi_{k+1}(\widetilde{X},\ e_0) & \to & \pi_{k+1}(\widetilde{X},\ X;\ b_0)\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}(\text{接上行})\xrightarrow{\partial^*} & \pi_k(B,\ b_0) & \to & \pi_k(X^*,\ b_0) & \to\cdots\\ & \uparrow\omega_* & & \uparrow p_* & \\ (\text{接下行})\xrightarrow{\partial^*} & \pi_k(X,\ e_0) & \to & \pi_k(\widetilde{X},\ e_0) & \to\cdots\end{array}$$

因当$k>n$

$$\pi_k(X^*,\ b_0)=0=\pi_k(\widetilde{X},\ e_0),$$

故

$$\partial_*:\pi_{k+1}(X^*,\ B;\ b_0)\approx\pi_k(B,\ b_0),$$

$$\partial_*:\pi_{k+1}(\widetilde{X},\ X;\ b_0)\approx\pi_k(X,\ e_0).$$

于是

$$\omega_*:\pi_k(X,\ e_0)\approx\pi_k(B,\ b_0),\ k>n. \ ]$$

推论5.4　设B是$(n-1)$-连通空间，$n\geqslant 2$。$\omega: X\to B$是n-连通纤维映射，对$b_0\in B$，$e_0\in F=\omega^{-1}(b_0)$。则

$$\pi_{n-1}(F,\ e_0)\approx\pi_n(\mathrm{B},\ b_0),$$

$$\pi_k(F,\ e_0)=0,\qquad k\neq n-1.$$

证明　因B是单连通的，根据CHP，知F是路径连通空间。考虑（X，F）的同伦叙列

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \pi_k(B,\ b_0) & & \\ & & & \overset{\omega_*}{\nearrow} & \approx\uparrow\omega_* & & \\ \cdots\to\pi_k(F,\ e_0) & \to & \pi_k(X,\ e_0) & \to & \pi_k(X,F;\ e_0) & \to & \pi_{k-1}(F,e_0)\to\cdots\end{array}$$

及假设，有

$$\pi_k(F, e_0)=\begin{cases}0, & \text{当 } 1\leqslant k<n-1,\\ \pi_n(B, b_0), & \text{当 } k=n-1,\\ 0, & \text{当 } k>n-1.\end{cases}$$ 】

顺便，我们在此给出 (π, n)-伦型空间的定义，其中整数 $n\geqslant 1$，π 是一个群，且当 $n>1$ 时，π 是交换群。

定义5.2 设 Y 是路径连通空间。Y 称为是 **(π, n)-伦型的空间**，如果 $\pi_k(Y)=0$，$k\neq n$，及 $\pi_n(Y)\approx\pi$。

例5.1 推论5.4中的纤维 F 是 $(\pi_n(B), n-1)$-伦型的空间。

例5.2 S^1 是 $(J, 1)$-伦型空间。

例5.3 考虑（实）射影空间叙列

$P^1\subseteq P^2\subseteq P^3\subseteq\cdots$ （"$\subseteq$" 表示自然实现）。

命 $P^\infty=\bigcup_{k=1,2,\cdots}P^k$。在 P^∞ 上定义拓扑为：$U\subseteq P^\infty$ 是开集，当且仅当对每一个 $k\geqslant 1$，$U\cap P^k$ 是 P^k 的开集。于是，容易验证

$$\pi_1(P^\infty)\approx J_2, \qquad \pi_k(P^\infty)=0 \quad (k>1).$$

即 P^∞ 是 $(J_2,1)$-伦型的空间。

例5.4 考虑复数域上的线性空间叙列

$$C_1\subset C_2\subset C_3\subset\cdots\subset C_k\subset C_{k+1}\subset\cdots,$$

其中 C_k 的复维数是 k，它是 C_{k+1} 中最后一个坐标为（复数）0 的点所成的子空间。命

$$S^{2k+1}=\left\{z=(z_1, z_2\cdots, z_{k+1})\in C_{k+1}\,\middle|\,\sum_{j=1}^{k+1}|z_j|^2=1\right\};$$

及 M^{2k} 是复维数为 k 的复射影空间。

记 $p_k: S^{2k}\to M^{2k}$ 为自然投射，容易验证 p_k 是丛映射（见例Ⅳ.2.4），其纤维同胚于 S^1。

根据纤维映射的正合同伦叙列，有

$$\pi_1(M^{2k})=0, \qquad \pi_2(M^{2k})\approx J,$$
$$\pi_j(M^{2k})=0, \qquad 2<j\leqslant 2k.$$

按自然方式，将 M^{2k} 实现在 $M^{2(k+1)}$ 中作为其子空间。此时，包含映射 $M^{2k}\subset M^{2(k+1)}$ 导出同构

$$\pi_2(M^{2k})\approx\pi_2(M^{2(k+1)}).$$

命 $M^\infty=\bigcup_{k=1,2\cdots}M^{2k}$。在 M^∞ 上定义拓扑为：$U\subseteq M^\infty$ 是开集，当且仅当对每一个 $k\geqslant 1$，$U\cap M^{2k}$ 在 M^{2k} 中是开集。

于是

$$\pi_1(M^\infty)=0,$$
$$\pi_2(M^\infty)\approx J,$$
$$\pi_j(M^\infty)=0, \qquad j>2.$$

故 M^∞ 是 $(J,2)$-伦型空间。

附记　因 M^{2k} 有自然胞腔剖分

$$M^{2k}=M^{2(k-1)}\cup e^{2k}=M^{2(k-2)}\cup e^{(k-1)}\cup e^{2k}=\cdots$$
$$=e^0\cup e^2\cup e^4\cup\cdots\cup e^{2k}.$$

可见

$$H^j(M^{2k})\approx\begin{cases}J, & j=0,2,4,\cdots,2k,\\ 0, & \text{其余的 } j.\end{cases}$$

且设 a 是 $H^2(M^{2k})$ 的生成元，则 $\underbrace{a\vee a\vee\cdots\vee a}_{j\text{ 个}}(1\leqslant j\leqslant k)$ 是 $H^{2j}(M^{2k})$ 的生成元。

命题5.5　设 F 是 $(J,2)$-伦型的路径连通空间。则存在映射 $\phi:M^\infty\to F$，使得对 $j\geqslant 0$，

$$\phi^*:H^j(F)\approx H^j(M^\infty).$$

证明　因 $M^2=S^2$（见Ⅳ.§4），有映射 $g:M^2\to F$，使得

$$g_*:\pi_2(M^2)\approx\pi_2(F).$$

由于 g 的特征类 $\kappa^2(g)\in H^2(M^2,\ \pi_2(F))$（见定义Ⅲ.5.3），可扩充到 $H^2(M^4,\pi_2(F))$ 中，知就某一个适当剖分而言，g 可扩

充至M^4的三维骨架上(见推论Ⅲ.5.7).因为当$j>2,\pi_j(F)=0$,故g可扩充至映射$\phi:M^\infty\to F$,使$\phi_*:\pi_j(M^\infty)\approx\pi_j(F)$。再由Hurewicz定理,容易推断命题成立.】

推论5.6 设F是$(J,2)$-伦型空间.则

$$H^j(F)\approx\begin{cases}J, & \text{当 } j \text{ 为偶数},\ j\geqslant 0,\\ 0, & \text{其余的 } j.\end{cases}$$

且如β是$H^2(F)$的生成元,则$\underbrace{\beta\vee\beta\vee\cdots\vee\beta}_{p\text{个}}$是$H^{2p}(F)$的生成元.】

§6 同纬像定理的证明及球的部份同伦群计算

作为本书的结束,本节证明 Freudenthal 同纬像定理,并用来计算球S^n的部分同伦群.更多的情形由于需专门的预备知识,不能详细介绍其证明过程,只列出一些结果供读者参考.

定义6.1 设Y是有限单纯复形,B称为Y的同纬像空间,如果B是$Y\times\langle 0,1\rangle$将子空间$Y\times(0)$与$Y\times(1)$分别等同成点$b_0$与$b_1$后所成的商空间.显然$B$是有限多面体,因而亦称**同纬像复形**.(复习题:验证B与Y按练习Ⅱ.10方式得出的空间有相同的伦型.)

引理6.1 设Y是$(m-1)$-连通的,$m\geqslant 2$.则B是m-连通的.

证明 首先指出的B是单连通.显然B是两个锥形C_1与C_2的和,即$B=C_1\cup C_2, C_1\cap C_2=Y$.对任意$\xi\in\pi_1(B,b)$ $(b\in Y)$,易见$\xi=[f_1][f_2]\cdots]f_p]$,其中每一个$f_i$是$C_1$或$C_2$中的迴路.由$\pi_1(C_1)=0=\pi_1(C_2)$,知$\xi=0$.

其次,取定Y上的一个锥形C,作为集合$C=Y\cup Y\times(0,1)\cup b'$,有映射$\varphi:(C,Y)\to(B,b_0)$,使得$\varphi$将$C-Y$一一地映射至$B-(b_0)$上.根据同调群的截去性质(见[1]定理Ⅴ.3.4或见Ⅱ.

§8），有

$$\varphi: H_p(C,Y) \approx H_p(B,b_0).$$

因Y是$(m-1)$-连通的，且对一切p，有$H_p(C)=0$。由同调叙列正合性，知当$1\leqslant p\leqslant m$，$H_p(C,Y)=0$.故

$$H_p(B)=H_p(B,b_0)=0 \quad (1\leqslant p\leqslant m).$$

由Hurewicz 定理，B是m-连通的。▌

现在，再设$X=\Omega_{b_0}$，$F=\Lambda_{b_0}$分别是B上的以b_0为起点的路径空间及迴路空间（见定义Ⅳ.8.1）. 又设$\omega: X\to B$为映射，使得对任意$f\in X$,即$f:(I,(0))\to(B,b_0)$为映射,有$\omega(f)=f(1)$. 由定理Ⅳ.8.2，ω是纤维映射，且在b_0处的纤维即F，X可缩成一点e_{b_0}(即b_0处常值映射)。于是根据引理6.1及推论3.3，F是$(m-1)$-连通的。

引理6.2　设C,Y,X,B,F,ω如上所述，则存在映射$\eta:(C,Y)\to(X,F)$，使得

(i) $\varphi=\omega\eta$,其中映射$\varphi:(C,Y)\to(B,b_0)$见引理6.1的证明；

(ii) 当$2\leqslant p\leqslant 2m$,

$\eta_*: H_p(C,Y)\approx H_p(X,F)$，$\eta_*: H_{p-1}(Y)\approx H_{p-1}(F)$；

(iii) $\eta_*:\pi_p(Y)\to\pi_p(F)$，当$1\leqslant p\leqslant 2m-1$是在上同态；当$1\leqslant p\leqslant 2m-2$是同构。

证明　因C是可缩的，$\varphi: C\to B$同伦于常值映射$\mu(C)=c'\in B$。因B是路径连通的,ω是在上的，便有$x'\in X$,使$\omega(x')=c'$。记$\eta': C\to X$，使$\eta'(C)=x'$。根据纤维映射ω对锥复形C具有CHP，则$\eta'\simeq\eta: C\to X$,使$\omega\eta=\varphi$。因$\varphi(Y)=b_0$,知$\eta(Y)\subseteq F$。所以(i)成立。

当$2\leqslant p\leqslant 2m$，在图表

$$\begin{array}{ccccc}
H_{p-1}(Y) & \xleftarrow{\partial_*} & H_p(C,Y) & \longrightarrow & H_p(B,b_0) \\
\downarrow \eta_* & & \downarrow \eta_* & \nearrow \omega_* & \\
H_{p-1}(F) & \xleftarrow{\partial_*} & H_p(X,F) & &
\end{array}$$

中交换成立。依推论 3.3，知 ω_* 是同构，故得

$$\eta_*:H_p(C,Y)\approx H_p(X,F).$$

而 C 与 X 是可缩的，从而也有 $\eta_*:H_{p-1}(Y)\approx H_{p-1}(F)$。故 (ii) 成立。

记 M_η 为 $\eta:Y\to F$ 的映射柱形（定义见Ⅱ的§6）。由(ii)易见，当 $1\leqslant p\leqslant 2m-1$，$H_p(M_\eta,Y)=0$。因 $m\geqslant 2$，Y,F 及 M_η 都是单连通的，故根据相对Hurewicz定理（Ⅱ5.2），有 $\pi_p(M_\eta,Y)=0$，$1\leqslant p\leqslant 2m-1$。于是根据同伦叙列的正合性便知(iii)成立。▌

现在，我们来证明比定理Ⅱ.9.2更具一般形式的"粗略"同纬像定理。

定理6.3 设 Y 是 $(m-1)$-连通的有限单纯复形，$m\geqslant 2$，B 是 Y 的同纬像复形。则同纬像同态（见定义Ⅱ.9.1）$E:\pi_p(Y)\to\pi_{p+1}(B)$，当 $1\leqslant p\leqslant 2m-1$ 是在上的；当 $1\leqslant p\leqslant 2m-2$ 是同构。

证明 命 $\omega:X\to B$，$\eta:(C,Y)\to(X,F)$ 如上述。考虑具有交换性的图表

$$\begin{array}{ccc}\pi_{p+1}(X,F) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_p(F)\\ \uparrow\eta_* & & \uparrow\eta_*\\ \pi_{p+1}(C,Y) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_p(Y)\end{array}$$

因 X 与 C 是可缩的，边沿同态 ∂_* 是同构 $(p\geqslant 1)$。

记

$$E'=\omega_*\partial_*^{-1}\eta_*=\omega_*\eta_*\partial_*^{-1}:\pi_p(Y)\to\pi_p(B)$$

则由引理6.2性质(iii)及纤维映射 $\omega:X\to B$ 导出同构 $\omega_*:\pi_{p+1}(X,F)\approx\pi_{p+1}(B)$，知当 $1\leqslant p\leqslant 2m-1$，$E'$ 为在上同态；当 $1\leqslant p\leqslant 2m-2$，$E'$ 是同构。

然而由 $\varphi=\omega\eta$ 及交换图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_p(Y) & \xrightarrow{E} & \pi_{p+1}(B) \\ & \partial_*^{-1}\searrow \quad \nearrow\varphi_* & \\ & \pi_{p+1}(C,Y) & \end{array}$$

知 $E=E'$.】

推论6.4 设$E:\pi_n(S^m)\to\pi_{n+1}(S^{m+1})$, $m\geqslant2$是同纬像同态，则

(i) 当$1\leqslant n\leqslant 2m-2$，$E$是同构；

(ii) 当$n=2m-1$，E是在上同态。

此即定理Ⅱ.9.2.】

关于球S^n的同伦群的计算问题，我们举一些已知的结果如下：

$$\pi_1(S^1)\approx J,$$
$$\pi_n(S^1)=0,\qquad (n\geqslant2).$$

当$n\geqslant2$

$$\pi_n(S^n)\approx J,$$
$$\pi_{n+r}(S^n)=0\qquad (r<0).$$

特别地，由 Hopf 纤维化，还有

$$\pi_3(S^2)\approx J,$$
$$\pi_7(S^4)\approx J\oplus\pi_6(S^3),$$
$$\cdots\cdots$$

现在，对固定的正整数r，当$n>r+1$时，根据推论6.4，

$$\pi_{n+r}(S^n)\approx\pi_{n+r+1}(S^{n+1}).$$

因之，只须计算 $\pi_{2r+2}(S^{r+2})$，可得到对一切$n\geqslant2$的同伦群$\pi_{n+r}(S^n)$.

1° $r=1$的情形 $\pi_3(S^2)\approx J$. 一般地有

命题6.5 当$n\geqslant3$，$\pi_{n+1}(S^n)\approx J_2$.

证明 由推论6.4，当$n\geqslant3$，$\pi_{n+1}(S^n)\approx\pi_{n+2}(S^{n+1})$，故只须计算$\pi_4(S^3)$.

命 $\omega: X\to S^3$ 是3-连通的纤维映射，根据推论5.4，则 $F=\omega^{-1}(b_0)$，$b_0\in S^3$ 是 $(J, 2)$-伦型空间。

考虑 $\omega: X\to S^3$ 的王宪钟（上调）叙列

$$\cdots\to H^{q-3}(F)\to H^q(X)\to H^q(F)\xrightarrow{\rho} H^{q-2}(F)\to H^{q+1}(X)\to\cdots,$$

由于 $H^2(X)=0=H^3(X)$（X是 3-连通空间），可见

$$\rho: H^2(F)\approx H^0(F)\approx J.$$

记 $e\in H^0(F)$ 是上调环 $H^*(F)$ 的单位元素，$\beta=\rho^{-1}(e)\in H^2(F)$。利用推论5.6，知

$$H^i(F)\approx\begin{cases} J, & \text{当 } i\geqslant 0\text{是偶数,}\\ 0, & \text{其余的 } i.\end{cases}$$

且 $\beta^p=\underbrace{\beta\vee\beta\vee\cdots\vee\beta}_{p\text{个}}$ 是 $H^{2p}(F)$ 的生成元。

由于

$$\begin{aligned}\rho(\beta^p)&=\rho(\beta\vee\beta^{p-1})\\&=\rho(\beta)\vee\beta^{p-1}+(-1)^{4\times 2}\beta\vee\rho(\beta^{p-1})\end{aligned}$$

（见定理4.2′），可用归纳法证明

$$\rho(\beta^p)=p\beta^{p-1}.$$

取 $q=2p\,(p\geqslant 2)$，上述王叙列改写为

$$0\to H^{2p}(X)\to H^{2p}(F)\xrightarrow{\rho} H^{2p-2}(F)\to H^{2p+1}(X)\to 0.$$

因 $H^{2p}(F)\approx J\approx H^{2(p-1)}(F)$，$\beta^p$ 与 β^{p-1} 分别是它们的生成元及 $\rho(\beta^p)=p\beta^{p-1}$。可见 $\rho: H^{2p}(F)\to H^{2(p-1)}(F)$ 是单同态，故

$$\begin{aligned}&H^{2p}(X)=0,\\&H^{2p+1}(X)\approx J_p\qquad(p\geqslant 2).\end{aligned}$$

根据整系数上、下同调群的对偶关系（见[1]定理Ⅳ.2.4），X 的（整系数）下同调群从 0 维起顺次同构于

$$J,0,0,0,J_2,0,J_3,0,J_4,\cdots.$$

根据 Hurewicz 定理有

$$\pi_4(S^3)\approx\pi_4(X)\approx J_2.\rbrack$$

以下我们只叙述计算的结果.

2° r=2的情形

$$\pi_4(S^2)\approx\pi_4(S^3)\approx J_2.$$

一般地，当$n\geqslant 3$

$$\pi_{n+2}(S^n)\approx J_2.$$

3° r=3的情形

$$\pi_5(S^2)\approx\pi_5(S^3)\approx J_2,$$

$$\pi_6(S^3)\approx J_{12},\ \pi_7(S^4)\approx J\oplus J_{12}.$$

一般地，当$n\geqslant 5$

$$\pi_{n+3}(S^n)\approx J_{24}.$$

4° r=4的情形

$$\pi_7(S^2)\approx J_{12},\quad \pi_7(S^3)\approx J_2,$$

$$\pi_8(S^4)\approx\pi_8(S^7)\oplus\pi_7(S^3)\approx J_2\oplus J_2,$$

$$\pi_9(S^5)\approx J_2.$$

一般地，当$n\geqslant 6$

$$\pi_{n+4}(S^n)=0,$$

$$\cdots\cdots$$

应该指出，据H• Toda1962年所著“Composition methods in homotopy groups of spheres”一书的记载，对于$\pi_{n+r}(S^n)$已计算了$r\leqslant 19$的所有情形。自然，要利用到更进一步的同伦运算等知识，在此不一一列出，有兴趣的读者可参阅该书。

最后，关于球的同伦群计算，我们指出下面一般的事实作为结束：当$m>n$，n是奇数时，$\pi_m(S^n)$是有限群；当n是偶数时，如$m>n$，$m\neq 2n-1$，$\pi_m(S^n)$亦是有限群；如$m=2n-1$，$\pi_m(S^n)$是J与一有限群的直和。这些结果可在[4] XI 中找到它们的证明，不再赘述。

练 习 VI

1. 设$\omega: X \to B$是纤维映射，$b_0 \in B$，$F=\omega^{-1}(b_0)$，G是交换群。又设$A(X)=\sum_n A_n(X)=\bigcup_p A^p(X)$是 §2 中定义的以$G$为系数群的单梯升标$\partial$-群。记

$$A_n^*=\mathrm{Hom}(A_n(X), G),$$
$$A^*=\sum_n A_n^*,$$
$$A^{*p}=\{f \in A^* \mid f(A^{p-1}(X))=0\},$$
$$A_n^{*p}=A^{*p} \cap A_n^* .$$

证明A^*是单梯降标δ-群（见练习Ⅴ.4.的定义），其中δ是∂的对偶同态（定义见[1]Ⅴ.§2)。且

(i)对任意p，$A^{*p}=\sum_n A_n^{*p}$；

(ii)对任意n，$\delta A_n^* \subseteq A_{n+1}^*$；

(ii)如$f \in A_l^*$，$f \neq 0$，则$0 \leqslant w(f) \leqslant l$，其中重量

$$w(f)=\sup_{f \in A^{*p}}\{p\}.$$

2. 假设同题1，考虑A^*联系的正合偶

$$\mathscr{C}(A^*)=\langle D^*, E^*; i^*, j^*, k^*\rangle$$

及其导来偶（运用练习Ⅴ.4.），证明

(i) $E_{p,q}^* \approx \mathrm{Hom}(C_p(B), H^q(F, G))$；

(ii) $E_{p,q}^{*(2)} \approx H^p(B, H^q(F, G))$。

3. 证明定理4.2′。

4. 叙述并证明上调 Gysin 叙列。

5. 设$\omega: X \to B$是纤维映射，$b_0 \in B$，$F=\omega^{-1}(b_0)$且适合性质：

(i) B及E是路径连通的，$\pi_1(B, b_0)$在$H_j(F)$上的作用是平凡的（一切j）；

(ii) 当$0<j<p$，$H_j(B)=0$；

(ii) 当$0<j<q$，$H_j(F)=0$。

则存在正合叙列

$$H_{p+q-1}(F) \xrightarrow{i^*} \cdots \longrightarrow H_j(F) \xrightarrow{i_*} H_j(X) \xrightarrow{\omega_*} H_j(B)$$

$$\longrightarrow H_{j-1}(F) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\omega_*} H_2(B) \longrightarrow H_1(F)$$

$$\xrightarrow{i_*} H_1(X) \xrightarrow{\omega_*} H_1(B) \longrightarrow 0.$$

其中 i_* 是包含映射$F \subseteq X$导出的同态，ω_*是纤维映射 ω 导出的同态。

附录A　多面体的广义同调群

本附录的主要目的是给出下面定理(即定理Ⅱ.1.7）的证明：

定理　设K是有限（单纯）复形，则

$$H(K_q,J)\approx H_q(S(|K|)),\qquad q\geqslant 0.$$

§1　复形的有序链复形

定义1.1　设K是有限（单纯）复形，K中任意排定一个次序的（$q+1$）个顶点$v_0<v_1<\cdots<v_q$，$q\geqslant 0$，称为复形K的q维**有序单形**，如果v_0，v_1，…，v_q在K的某一个(几何）单形上，记为$\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$。注意，这里$v_0,v_1,\cdots,v_q\in K$是可以有相同的，此时称$\sigma^q$是退化的，否则是非退化的。$K$中全体$q$维有序单形自由生成的群，称为$K$的$q$维**有序链群**，记为$C_q(K_0,J)$。自然，当$q<0$，规定$C_q(K_0,J)=0$。

定义1.2　对

$$\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle\in C_q(K_0,J),\qquad q>0,$$

命

$$\partial_q(\sigma^q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_q\rangle\in C_{q-1}(K_0,J),$$

再作线性扩充，得到同态

$$\partial_q:C_q(K_0,J)\longrightarrow C_{q-1}(K_0,J),\qquad q>0,$$

称为边缘运算。当$q\leqslant 0$，规定边缘运算$\partial_q=0$。直接计算，有$\partial_q\partial_{q+1}=0$。于是$\{C_q(K_0,J),\partial_q\}$是(非负)链复形（见Ⅱ.§5），称为$K$的有序链复形，记为$C(K_0,J)$。明显地

$$Z_q(K_0,J)=\ker\partial_q\subset C_q(K_0,J),$$

$$B_q(K_0,J)=\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}\subset Z_q(K_0,J),$$

分别称为K的**有序闭链群，有序边沿链群**。而

$$H_q(K_0,J)=Z_q(K_0,J)/B_q(K_0,J)$$

称为K的**有序同调群**。

以后，在不致引起混淆时，同态∂_q的下标q略去。

例1.1 设$\hat{K}=\hat{v}K$是以K为底，$\hat{v}$为顶的锥形①。对$\hat{K}$的q维有序单形

$$\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle\in C_q(\hat{K}_0,J),$$

记 $\hat{v}\sigma^q=\langle\hat{v}\,v_0v_1\cdots v_q\rangle\in C_{q+1}(\hat{K}_0,J)$。同样的方式，对$c_q\in C_q(\hat{K}_0,J)$，定义$\hat{v}\,c_q\in C_{q+1}(\hat{K}_0,J)$。容易验证，当$q>0$，对于$c_q\in C_q(\hat{K}_0,J)$，有

$$\partial(\hat{v}\,c_q)=c_q-\hat{v}(\partial c_q).$$

进而，如果$c_q\in Z_q(\hat{K}_0,J)$，有

$$c_q=\partial(\hat{v}c_q)\in B_q(\hat{K}_0,J).$$

故

$$H_q(\hat{K}_0,J)=0,\qquad q>0.$$

特别地，设$\bar{s}$表示单形s的闭包复形(定义见[1]87页)，则$H_q(\bar{s}_0,J)=0,\qquad q>0$。

现在，我们考虑$H_q(K_0,J)$与$H_q(K,J)$的关系。首先，定义链映射$\varphi:C(K_0,J)\longrightarrow C(K,J)$如下：设

$$\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle\in C_q(K_0,J).$$

(i) 如果σ^q是退化的，命

$$\varphi(\sigma^q)=0.$$

(ii) 如果σ^q是非退化的，命

$$\varphi(\sigma^q)=v_0v_1\cdots v_q\in C_q(K,J).$$

① 意义见[1]113页。

再作线性扩充，得到同态

$$\varphi: C_q(K_0, J) \longrightarrow C_q(K, J).$$

且$\partial\varphi=\varphi\partial$.（注意，等式两端的$\partial$是不同链复形中的边沿运算.）

事实上，设 $\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle \in C_q(K_0, J)$.

（i）如果 σ^q 是退化的，即有$k<l$，$v_k=v_l$，则

$$\partial\varphi(\sigma^q)=0,$$

及

$$\begin{aligned}\varphi\partial(\sigma^q) &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\varphi(v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_q)\\ &=(-1)^k u_0\cdots\hat{v}_K\cdots v_q+(-1)^l v_0\cdots\hat{v}_l\cdots v_q=0.\end{aligned}$$

（ii）如果 σ^q 是非退化的，则

$$\begin{aligned}\partial\varphi(\sigma^q) &= \partial(v_0v_1\cdots v_q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_q\\ &=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\varphi\langle v_0\cdots\hat{v}_i\cdots v_q\rangle=\varphi(\partial\sigma^q).\end{aligned}$$

因此φ是链映射，它导出同调群间的同态

$$\varphi_*: H_q(K_0, J) \longrightarrow H_q(K, J), \qquad q\geqslant 0.$$

命题1.1 链映射 $\varphi: C_q(K_0, J)\longrightarrow C_q(K, J)$ 是链等价，故

$$\varphi_*: H_q(K_0, J)\approx H_q(K, J), \qquad q\geqslant 0.$$

证明 对 K 的全体顶点指定一个顺序 ω. 定义链映射

$$\psi: C(K, J)\longrightarrow C(K_0, J)$$

如下：设有向单形 $\sigma_q\in C_q(K, J)$，知

$$\sigma_q=\pm v_0v_1\cdots v_q,$$

其中 $v_0<v_1<\cdots<v_q$（按顺序 ω）. 命

$$\psi(\sigma_q)=\pm\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle\in C_q(K_0, J).$$

再作线性扩充，得到同态

$$\psi: C_q(K,J) \longrightarrow C_q(K_0,J)。$$

易见，$\partial\psi=\psi\partial$。即 ψ 是链映射。

明显地，有

$$\varphi\psi=1(\text{恒同}): C_q(K,J) \longrightarrow C_q(K,J),\quad q\geqslant 0。$$

下面证明

$$\psi\varphi\simeq 1(\text{恒同}): C_q(K_0,J) \longrightarrow C_q(K_0,J),\qquad q\geqslant 0。$$

我们用归纳法定义同态

$$D: C_q(K_0,J) \longrightarrow C_{q+1}(K_0,J),\qquad q\geqslant 0,$$

适合：

(i)对 $c_q\in C_q(K_0,J)$, $\partial D(c_q)=\psi\varphi(c_q)-c_q-D\partial(c_q)$；

(ii)对K的有序单形σ^q，有$D\sigma^q$在$|\sigma^q|$上（即$D\sigma^q$是σ^q的闭包复形上的（$q+1$）维有序链）。

当$q=0$，命$D=0$，(i)与(ii)自然成立。假定当$q<n$，D已有适合(i)与(ii)的定义。对有序单形$\sigma^n=\langle v_0v_1\cdots v_n\rangle\in C_n(K_0,J)$，命

$$c_n=\psi\varphi(\sigma^n)-\sigma^n-D(\partial\sigma^n)\in C_n(K_0,J)。$$

易见 c_n 在 $|\sigma^n|$ 上，且

$$\begin{aligned}\partial c_n&=\partial\psi\varphi(\sigma^n)-\partial\sigma^n-\partial D(\partial\sigma^n)\\&=\psi\varphi(\partial\sigma^n)-\partial\sigma^n-[\psi\varphi(\partial\sigma^n)-\partial\sigma^n-D\partial(\partial\sigma^n)]\\&=0。\end{aligned}$$

知 c_u是 $|\sigma^n|$ 上的有序闭链，根据例1.1，亦是有序边沿链。即在$|\sigma^n|$上存在 $c_{n+1}\in C_{n+1}(K_0,J)$，使得$\partial c_{n+1}=c_n$。

又命

$$D(\sigma^n)=c_{n+1}。$$

再作线性扩充，得到同态 D，且明显地适合(i)与(ii)。归纳步骤完成。

因此

$$\psi\varphi\simeq 1(\text{恒同}): C_q(K_0,J) \longrightarrow C_q(K_0,J),\quad q\geqslant 0。$$

故

$$\varphi_*: H_q(K_0, J) \approx H_q(K, J), \qquad q \geqslant 0. \ \rbrack$$

§2 广义链的重心重分

以下总设K为有限（单纯）复形，$X=|K|$。

为了比较链复形$C(S(X))$与$C(K,J)$，根据命题1.1，只须考虑$C(S(X))$与$C(K_0,J)$的关系。

设$\Delta^q=\langle e^0e^1\cdots e^q\rangle$是$q$维有序（自然）单形，$q\geqslant 0$。我们将定义链映射

$$\alpha: C(K_0,J) \longrightarrow C(S(X)).$$

事实上，对K上有序单形$\sigma^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle\in C_q(K_0,J)$，存在(唯一）线性映射

$$l: |\Delta^q| \longrightarrow |\sigma^q| \subset X,$$

使得 $l(e^i)=v_i$，$0\leqslant i\leqslant q$。命

$$\alpha(\sigma^q)=(l,\ \Delta^q)\in C_q(S(x)).$$

再作线性扩充，得到同态

$$\alpha: C_q(K_0,J)\longrightarrow C_q(S(X)),\quad q\geqslant 0.$$

易见 $\partial\alpha=\alpha\partial$，即$\alpha$是链映射.

问题：α是否是链等价？

我们将在§4中肯定地回答这一个问题，本节和下一节作予备。

设 $T=(\xi,\Delta^q)$是Δ^n上的广义单形，即$\xi:\Delta^q\longrightarrow\Delta^n$为映射，$\Delta^q=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle$。$T$称为线性的，如果

$$\xi\left(\sum_{i=0}^q t_iv_i\right)=\sum_{i=0}^q t_i\xi(v_i), \qquad \sum_{i=0}^q t_i=1,\quad 0\leqslant t_i\leqslant 1.$$

显然，此时T的面$T^{(i)}$亦是线性的。于是Δ^n中线性广义单形的全体生成$C(S(\Delta^n))$的子复形，记为$C(S'(\Delta^n))$。

由于线性广义单形完全由Δ^q的顶点v_i的像所决定，设$x_0,x_1,\cdots,x_q\in\Delta^n$，命$(x_0,x_1,\cdots,x_q)$表示$\Delta^n$上的一个线性广义单形：

$$T_x=(\xi_x,\Delta^q),$$

其中 $\xi_x(v_i)=x_i$，$0\leqslant i\leqslant q$。特别地，记

$$T_n=(\iota,\Delta^n),$$

$\iota:\Delta^n\longrightarrow\Delta^n$ 为恒同映射，是 Δ^n 上的 n 维线性广义单形。

记　$b^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{n+1}v_i$ 是 Δ^n 的重心。于是对 $q\geqslant 0$，由

$$\eta(x_0,\cdots,x_q)=(b_n,x_0,\cdots,x_q)$$

定义一个同态

$$\eta:C_q(S'(\Delta^n))\longrightarrow C_{q+1}(S'(\Delta^n)).$$

且若 $c_q\in C_q(S'(\Delta^n))$，有

$$\partial\eta(c_q)=c_q-\eta\partial(c_q).$$

事实上，只须注意到

$$\begin{aligned}\partial\eta(x_0,x_1,\cdots,x_q)&=\partial(b_n,x_0,\cdots,x_q)\\&=(x_0,x_1,\cdots,x_q)\\&\quad-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\eta(x_0,\ \cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_q)\\&=(x_0,x_1,\cdots,x_q)-\eta\partial(x_0,x_1,\cdots,x_q).\end{aligned}$$

现在，对拓扑空间 X，用归纳法定义同态

$$Sd:C_q(S(X))\longrightarrow C_q(S(X)),$$
$$D:C_q(S(X))\longrightarrow C_{q+1}(S(X)),\qquad q\geqslant 0.$$

使对于 $c_q\in C_q(S(X))$，适合

(i) $\partial Sd(c_q)=Sd\partial(c_q)$；

(ii) $\partial D(c_q)=Sd(c_q)-c_q-D\partial(c_q)$.

其中链映射 Sd 称为**广义链的重分链映射**，而同态 D 表明

$$Sd\simeq 1\ (\text{恒同}):C_q(S(X))\longrightarrow C_q(S(X)),\qquad q\geqslant 0.$$

当 $q=0$，命 $Sd=1$（恒同），$D=0$。(i) 与 (ii) 自然成立。假定当 $q<n$，对一切 X，Sd 及 D 已有适合 (i) 与 (ii) 的定义。我们对线性广义单形 T_n 定义

$$Sd(T_n)=\eta[Sd(\partial T_n)]\in C_n(S'(\Delta^n)),$$

$$D(T_n)=\eta[SdT_n-T_n-D(\partial T_n)]\in C_{n+1}(S'(\Delta^n)).$$

而对X上的n维广义单形$T=(\xi,\Delta^n)$，命

$$Sd(T)=\xi(Sd(T_n))\in C_n(S(X)),$$

$$D(T)=\xi(D(T_n))\in C_{n+1}(S(X)),$$

其中$\xi: C_q(S'(\Delta^n))\subset C_q(S(\Delta^n))\longrightarrow C_q(S(X))$是映射$\xi$导出的链映射（见命题Ⅱ.1.2）。

再作线性扩充，得到同态Sd与D。则（i）是成立的。事实上，对$T=(\xi,\Delta^n)\in C_n(S(X))$，有

$$\begin{aligned}\partial Sd(T)&=\partial[\xi(Sd(T_n))]=\xi\,\partial[\eta(Sd\,\partial T_n)]\\&=\xi[Sd\,\partial T_n-\eta\partial(Sd\,\partial T_n)]\\&=\xi Sd(\partial T_n)=Sd\partial(T).\end{aligned}$$

（ii）是成立的。事实上，对$T=(\xi,\Delta^n)\in C_n(S(X))$，有

$$\begin{aligned}\partial D(T)&=\partial[\xi\eta(SdT_n-T_n-D\,\partial T_n)]\\&=\xi(SdT_n-T_n-D\partial T_n)-\xi\eta\,\partial(SdT_n-T_n-D\partial T_n)\\&=\xi SdT_n-\xi T_n-\xi D\partial T_n-\xi\eta\partial SdT_n+\xi\eta\,\partial T_n\\&\quad+\xi\eta Sd\,\partial T_n-\xi\eta\partial T_n-\xi\eta D\partial\partial T_n\\&=SdT-T-D\partial T.\end{aligned}$$

命题2.1 记

$$Sd^{(0)}=1\ (\text{恒同}),\quad Sd^{(r)}=Sd(Sd^{(r-1)}),\quad r\geqslant 1.$$

则对$c_q\in C_q(S(X))$，有

(iii) $\partial Sd^{(r)}(c_q)=Sd^{(r)}\partial(c_q)$；

(iv) $$\partial\sum_{i=0}^{r-1}DSd^{(i)}(c_q)=Sd^{(r)}(c_q)-c_q-\sum_{i=0}^{r-1}DSd^{(i)}\partial(c_q).$$

证明 由（i）明显地得到（iii）。

当$r=1$时，（iv）即为（ii）．由归纳法假定，对于$r<n$时（iv）成立，则

$$
\begin{aligned}
&\partial\sum_{i=0}^{n-1}DSd^{(i)}(c_q)\\
&\qquad=\partial\sum_{i=0}^{n-2}DSd^{(i)}(c_q)+\partial DSd^{(n-1)}(c_q)\\
&\qquad=Sd^{(n-1)}(c_q)-c_q-\sum_{i=0}^{n-2}DSd^{(i)}\partial c_q\\
&\qquad\quad+Sd(Sd^{(n-1)}c_q)-Sd^{(n-1)}(c_q)\\
&\qquad\quad-D\partial Sd^{(n-1)}(c_q)\\
&\qquad=Sd^{(n)}(c_q)-c_q-\sum_{i=0}^{n-1}DSd^{(i)}(\partial c_q).\ \rbrack
\end{aligned}
$$

§3 复盖定理

定义3.1 设X是拓扑空间，Γ是一个指标集，$F=\{A_\alpha\mid A_\alpha\subset X,\ \alpha\in\Gamma\}$是$X$的一个子集族．广义单形$T=(\xi,\Delta^q)$称为是与$F$相容的，如果对某个$\alpha\in\Gamma$，$\xi(\Delta^q)\subset A_\alpha$．

显然，如T与F相容，T的面$T^{(i)}$亦与F相容．

记 $S_F(X)=\{T\in S(X)\mid T$ 与 F 相容$\}$，它是$S(X)$的子复形．$S_F(X)$上的q维广义链群记为$C_q(S_F(X))$，自然$C(S_F(X))$是$C(S(X))$的子链复形．且按§2的Sd与D的定义，有

$$
SdC_q(S_F(X))\subset C_q(S_F(X)),
$$
$$
DC_q(S_F(X))\subset C_{q+1}(S_F(X)).
$$

命

$$
\tau:C_q(S_F(X))\longrightarrow C_q(S(X)),\qquad q\geqslant 0,
$$

是包含映射$S_F(X)\subset S(X)$导出的链映射．

命题3.1 设F是拓扑空间X的一个子集族，使X的每一点都是F中某子集的内点．则

$$
\tau_*:H_q(S_F(X))\approx H_q(S(X)),\qquad q\geqslant 0.
$$

我们先证一个引理。

引理3.2 假设同命题3.1，则对X的任何广义单形$T=(\xi,\Delta^q)$，存在整数$r\geqslant 0$，使得$Sd^{(r)}(T)\in C_q(S_F(X))$。

证明 因为$\{\mathrm{Int}A_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$是$X$的开复盖，知$\{\xi^{-1}(\mathrm{Int}A_\alpha)\mid \alpha\in\Gamma\}$是$\Delta^q$的开复盖。根据[1]定理Ⅰ.5.2，存在Lebesgue数$\delta>0$，使得Δ^q的每个直径小于δ的子集都含于某个集$\xi^{-1}(\mathrm{Int}A_\alpha)$中，于是它在$\xi$下的像包含在某个$A_\alpha$中，再根据[1]命题Ⅳ.3.6，存在整数$r\geqslant 0$，使得$Sd^{(r)}\Delta^q$($\Delta^q$的$r$次重分复形)的单形的直径都小于$\delta$。

由定义易见，$Sd^{(r)}(T)=\xi(Sd^{(r)}(T_q))$是$S_F(X)$上的$q$维链，故

$$Sd^{(r)}(T)\in C_q(S_F(X)).\ ▌$$

现在证明命题3.1。

对X的每一广义单形$T=(\xi,\Delta^q)$，有适合引理3.2的最小整数$r(T)\geqslant 0$。自然，如$T^{(i)}$是T的面，则$r(T^{(i)})\leqslant r(T)$。

由

$$\overline{D}(T)=\sum_{j=0}^{r(T)-1} DSd^{(j)}(T)$$

定义了同态

$$\overline{D}:C_q(S(X))\longrightarrow C_{q+1}(S(X)),\qquad q\geqslant 0.$$

于是由命题2.1 (iv)，有

$$\partial\overline{D}(T)=Sd^{(r(T))}(T)-T-\sum_{j=0}^{r(T)-1} DSd^{(j)}(\partial T)$$

$$=Sd^{(r(T))}(T)-T-\sum_{j=0}^{r(T)-1}\sum_{i=0}^{q}(-1)^i DSd^{(j)}(T^{(i)}).$$

而根据定义

$$\overline{D}\partial(T)=\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r(T^{(i)})-1}(-1)^i DSd^{(j)}(T^{(i)}).$$

故按

$$\bar{\tau}(T)=T+\partial\bar{D}(T)+\bar{D}\partial(T)$$

$$=Sd^{r(T)}(T)$$

$$-\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=r(T^{(i)})}^{r(T)-1}(-1)^{i}DSd^{(j)}(T^{(i)})\in C_q(S_F(X))$$

定义链映射

$$\bar{\tau}:C_q(S(X))\longrightarrow C_q(S_F(X))\quad,\ q\geqslant 0.$$

明显地，

$$\bar{\tau}\tau=1(\text{恒同}):C_q(S_F(X))\longrightarrow C_q(S_F(X)),$$

$$\tau\bar{\tau}\simeq 1(\text{恒同}):C_q(S(X))\longrightarrow C_q(S(X)).$$

因此 τ 是链等价。▌

§4　同构定理的证明

为了说明§2中链映射α是链等价，即证明单纯同调与广义同调的同构定理，我们还须作一点准备。

设K是有限（单纯）复形，$K'=SdK$，$\sigma\in K$。对于顶点$v\in Sd\sigma$，记$\mathrm{St}_{K'}v$是v在K'中的开星形，即SdK中以v为顶点的全体开单形的并集。命

$$A_\sigma=\bigcup_{v\in Sd\sigma}\mathrm{St}_{K'}v.$$

易见　$F=\{A_\sigma|\sigma\in K\}$是$X=|K|$的开复盖，适合命题3.1的条件。

引理4.1　对每一个$\sigma\in K$，A_σ是可缩的。

证明　因$\sigma\subset A_\sigma$是可缩的，只须指出σ是A_σ的强形变收缩核。（见[1]Ⅱ.§10）

设$x\in A_\sigma$，以$x(v)$表示x在K中对顶点v的重心坐标。假定S^q是K中包含x的最低维单形，记S^q的顶点$v_0,\cdots,v_q$，并不妨设

$$x(v_0)\geqslant\cdots\geqslant x(v_q).$$

令S_i是K中由$v_0,\cdots,v_i$张成的单形，知S_i是S_{i+1}的面。经直接计算，不难看出在K'上有

$$x = x_0 b_{s_0} + \cdots + x_q b_{s_q},$$

其中b_{s_i}是S_i的重心（$0 \leqslant i \leqslant q$）．

$$x_i = (i+1)[x(v_i) - x(v_{i+1})], \qquad 0 \leqslant i < q,$$

$$x_q = (q+1)x(v_q).$$

因 $x \in A_\sigma$，即有某（最大）指标k，$b_{s_k} \in Sd\sigma$，$x_k > 0$。于是

$v_0,\cdots,v_k \in \sigma$。记 $d(x) = \sum_{i=0}^{k} x(v_i)$，知

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{d(x)} x(v_i) v_i$$

由此

$$h(x,t) = (1-t)x + t\bar{x}, \qquad t \in I$$

定义了A_σ到σ的强形变收缩映射

$$h: A_\sigma \times I \longrightarrow A_\sigma. \quad \rbrack$$

现在，我们来叙述并证明本附录的主要定理。

定理4.2 设K是有限（单纯）复形，$X = |K|$．链映射α定义如§2，则$\alpha: C_q(K_0,J) \longrightarrow C_q(S(X))$是链等价。于是

$$\alpha_*: H_q(K_0,J) \approx H_q(S(X)), \quad q \geqslant 0.$$

证明 记

$$F = \{A_\sigma \mid \sigma \in K\}$$

是X的开复盖，由命题3.1，知

$$\tau_*: H_q(S_F(X)) \approx H_q(S(X)), \qquad q \geqslant 0.$$

根据α的定义，对于$c_q \in C_q(K_0,J)$，有

$$\alpha(c_q) \in C_q(S_F(X)) \subset C_q(S(X)).$$

因此，α可分解成$\alpha = \tau\nu$:

$$C_q(K_0,J) \xrightarrow{\nu} C_q(S_F(X)) \xrightarrow{\tau} C_q(S(X)).$$

欲证α_*是同构，只须指出ν_*是同构。为此，对$x \in X$，命$w(x)$是

K中与x最邻近的顶点，即使得对一切K的顶点v，有

$$x(w(x))\geqslant x(v).$$

明显地，有性质：

(i) 如x是K的顶点，则$w(x)=x$;

(ii) 如$x\in A_\sigma$，则$w(x)$是σ的顶点。

我们构造链映射

$$\bar{\nu}:C_q(S_F(X))\longrightarrow C_q(K_0,J)$$

如下：对广义单形

$$T=(\xi,\Delta^q)\in C_q(S_F(X)),\qquad \Delta^q=\langle e^0e^1\cdots e^q\rangle,$$

记 $v_i=w(\xi e^i)$，$0\leqslant i\leqslant q$.

如$\xi(\Delta^q)\subset A_\sigma$，由(ii)知$v_i$是$\sigma$的顶点，即

$$\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle\in C_q(K_0,J).$$

命

$$\bar{\nu}(T)=\langle v_0v_1\cdots v_q\rangle.$$

再作线性扩充，得到同态$\bar{\nu}$，且显然它是链映射。

根据定义

$$\bar{\nu}\nu=1\ (\text{恒同}):C_q(K_0,J)\longrightarrow C_q(K_0,J).$$

反之，对$T=(\xi,\Delta^q)\in C_q(S_F(X))$，记$\sigma$是$K$中适合$\xi(\Delta^q)\subset A_\sigma$的最小单形，这样的$\sigma$是存在且唯一的。命

$$R(T)=A_\sigma.$$

不难验证：

(iii) 设$T^{(i)}$是T的面，则$R(T^{(i)})\subset R(T)$;

(iv) T与$\nu\bar{\nu}(T)$都是$R(T)$上的广义单形。

于是由引理4.1，$R(T)$是可缩的，仿照[1]定理Ⅳ.4.1，即零调承载子定理，便知道

$$\nu\bar{\nu}\simeq 1\ (\text{恒同}):C_q(S_F(X))\longrightarrow C_q(S_F(X)).$$

故ν是链等价，即

$$\nu_*:H_q(K_0,J)\approx H_q(S_F(X)),\qquad q\geqslant 0.\ ]$$

结合命题1.1，便得

定理4.3 设K是有限（单纯）复形，则

$$H_q(K,J)\approx H_q(S(|K|)),\qquad q\geqslant 0.$$ 】

利用同调叙列的正合性及“五引理”（见Ⅳ.§3末附记），便有

定理4.4 设(K,L)为有限复形偶，则

$$H_q(K,L;J)\approx H_q(S(|K|,|L|)),\qquad q\geqslant 0.$$ 】

附录 B　同调群的万有系数定理

以任意交换群G为系数群，有限（单纯）复形K的同调群$H_q(K,G)$，从代数结构上看，完全由G与整系数同调群$H_q(K,J)$决定。这是同调论中的一个重要事实，称为万有系数定理。本附录就是给出它的一个证明。其证明方法和结果对一般自由链复形的情形也都是成立的。这个结论在Ⅵ. § 3与 § 4中用到。

以下所有的群都是交换群，运算以加法记。

§ 1　张量积

定义1.1　设A与B是群。命$R(A,B)$表示所有形如(a,b)，$a\in A$，$b\in B$的元素集自由生成的群（见［1］定义B.3.1）。记$Y(A,B)$是$R(A,B)$中包含所有形如

$$(a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b)$$
$$(a,b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2)$$

的元素的最小子群，则群

$$A\otimes B=R(A,B)/Y(A,B)$$

称为A与B的**张量积**。

记$j:R(A,B)\to A\otimes B$为自然投射。对生成元$(a,b)\in R(A,B)$，记$a\otimes b=j(a,b)$。于是所有形如$a\otimes b$($a\in A$，$b\in B$)的元素组成$A\otimes B$的生成元集，且

(i)　$(a_1+a_2)\otimes b=a_1\otimes b+a_2\otimes b$，

(ii)　$a\otimes(b_1+b_2)=a\otimes b_1+a\otimes b_2$。

特别地，$0\otimes b=0=a\otimes 0$。

例1.1　设B是一个群，J是整数加群。由

$$f(r,b)=rb,\quad r\in J,\ b\in B,$$

决定同态 $f:R(J,B)\to B$。显然

$$f[Y(J,B)]=0。$$

于是 f 导出同态 $f:J\otimes B\to B$，使得

$$f(r\otimes b)=rb, \quad r\in J,\ a\in B。$$

因 $f(1\otimes b)=b$，知 f 是在上的。若

$$a=\sum_{i=1}^{n} r_i\otimes b_i\in\ker f,$$

又因

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\otimes b_i=\sum_{i=1}^{n} 1\otimes r_i b_i=1\otimes\sum_{i=1}^{n} r_i b_i,$$

知

$$\sum_{i=1}^{n} r_i b_i=f\left(1\otimes\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right)=0。$$

故 $a=0$。即 $f:J\otimes B\approx B$。

类似地可证 $B\otimes J\approx B$。

定义1.2 设 $f:A\to A'$，$g:B'$是群同态。由

$$(f,g)(a,b)=(f(a),g(b)), \quad a\in A,\ b\in B$$

决定同态 $(f,g):R(A,B)\to R(A',B')$。显然

$$(f,g)[Y(A,B)]\subset Y(A',B')。$$

于是有导出同态

$$f\otimes g:A\otimes B\to A'\otimes B',$$

称为 f 与 g 的张量积。自然

$$(f\otimes g)(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b)。$$

命题1.1 设 $f:A\to A'$，$f_1:A'\to A''$，及 $g:B\to B'$，$g_1:B'\to B''$ 均为群同态。则

$$(f_1\otimes g_1)\cdot(f\otimes g)=(f_1 f)\otimes(g_1 g)。$$

证明是明显的。】

定理1.2 设群A与B分别有（有限）直和分解①

$$A=\sum_{\alpha}A_{\alpha},\qquad B=\sum_{\beta}B_{\beta}.$$

记$i_{\alpha}:A_{\alpha}\to A$与$j_{\beta}:B_{\beta}\to B$是内射．则

$$i_{\alpha}\otimes j_{\beta}:A_{\alpha}\otimes B_{\beta}\to A\otimes B$$

是单同态，且

$$\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha}\otimes B_{\beta}\approx A\otimes B.$$

证明 首先，令

$$p_{\alpha}:A\to A_{\alpha},\qquad q_{\beta}:B\to B_{\beta}$$

是自然投射，即

$$p_{\alpha}i_{\alpha}=1\,(\text{恒同}),\qquad p_{\alpha}i_{\alpha'}=0\quad(\alpha'\neq\alpha);$$

$$q_{\beta}j_{\beta}=1\,(\text{恒同}),\qquad q_{\beta}j_{\beta'}=0\quad(\beta'\neq\beta).$$

于是

$$(p_{\alpha}\otimes q_{\beta})\cdot(i_{\alpha'}\otimes j_{\beta'})=\begin{cases}1\,(\text{恒同}), & \text{当}\alpha'=\alpha,\quad \beta'=\beta,\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

可见$i_{\alpha}\otimes j_{\beta}$是单同态．

其次，对于

$$c=\sum_{\alpha,\beta}c_{\alpha\beta}\in\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha}\otimes B_{\beta},$$

由

$$h(c)=\sum_{\alpha,\beta}(i_{\alpha}\otimes j_{\beta})c_{\alpha\beta}$$

定义了同态

$$h:\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha}\otimes B_{\beta}\to A\otimes B.$$

则

$$(p_{\alpha}\otimes q_{\beta})\cdot h(c)=c_{\alpha,\beta},$$

知h是单同态．而对$A\otimes B$的任意生成元$a\otimes b$，令

---

① 定义见[1]附录B．§2

$$a=\sum_{\alpha} i_{\alpha} a_{\alpha}, \qquad b=\sum_{\beta} j_{\beta} b_{\beta}.$$

知

$$h\left(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha} \otimes b_{\beta}\right)=a \otimes b,$$

即 h 是在上的。故

$$h: \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha} \otimes B_{\beta} \approx A \otimes B. \text{ 】}$$

推论1.3 设 A 是以 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 为基的(有限维)自由群，B 为一个群。则 $A \otimes B$ 的元素能唯一的表示成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i, \qquad b_i \in B.$$

证明 若记 A_i 为 a_i 自由生成的群，$1 \leqslant i \leqslant n$，则根据定理1.2即得推论。】

附记 由例1.2，实际上

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \mapsto (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

是 $A \otimes B$ 到 $\underbrace{B \oplus B \oplus \cdots \oplus B}_{n\text{个}}$ 的同构对应。

命题1.4 设群同态叙列

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

是正合的。则对任何群 B，叙列

$$A' \otimes B \xrightarrow{\bar{f}} A \otimes B \xrightarrow{\bar{g}} A'' \otimes B \longrightarrow 0$$

是正合的，其中 $\bar{f}=f \otimes 1$，$\bar{g}=g \otimes 1$，$1: B \to B$ 是恒同同态。

证明 （1）叙列在 $A'' \otimes B$ 处正合，即 $\bar{g}$ 是满同态：只须

注意，对于 $a''\in A''$，$b\in B$，因 g 是满的，所以存在 $a\in A$，使得 $a''=g(a)$。于是

$$a''\otimes b=(g\otimes 1)(a\otimes b)=\bar{g}(a\otimes b).$$

（2）叙列在 $A\otimes B$ 处正合：因为一方面有

$$\bar{g}\,\bar{f}=(g\otimes 1)\cdot(f\otimes 1)=gf\otimes 1=0\otimes 1=0.$$

即 $\mathrm{Im}\,\bar{f}\subset\ker\bar{g}$。

另一方面，记 D 是 $A\otimes B$ 中由所有元素 $a\otimes b$ 生成的子群，其中 $a\in\mathrm{Im}\,f$，$b\in B$。命

$$p:A\otimes B\to(A\otimes B)/D$$

为自然投射。

我们定义同态

$$\psi:A''\otimes B\to(A\otimes B)/D$$

如下：对于 $a''\in A''$，$b\in B$，存在 $a\in A$，使得 $a''=g(a)$。令

$$\psi(a''\otimes b)=p(a\otimes b).$$

易见 ψ 的定义是一意的，且决定同态 ψ。于是

$$p=\psi\cdot(g\otimes 1)=\psi\cdot\bar{g},$$

故 $\ker\bar{g}\subset D=\mathrm{Im}\,\bar{f}$。】

推论1.5 设 $f:A'\to A$ 为群同态，B 是群。则

$$(A\otimes B)/\bar{f}(A'\otimes B)\approx(A/f(A'))\otimes B,$$

其中 $\bar{f}=f\otimes 1$。

证明 易见叙列

$$A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A/f(A')\longrightarrow 0$$

是正合的，其中 g 是自然投射。于是根据命题1.4即得到。】

附记 一般而言，命题1.4中若 f 是单同态，$\bar{f}$ 不一定是单同态（见定义2.1）。

然而，我们有

命题1.6 设群同态叙列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

是正合的，且存在同态 $\tau: A'' \to A$，使得 $g\tau = 1$(恒同)$: A' \to A''$。则对任意群 B，叙列

$$0 \longrightarrow A' \otimes B \xrightarrow{\bar{f}} A \otimes B \xrightarrow{\bar{g}} A'' \otimes B \longrightarrow 0$$

是正合的，其中 $\bar{f} = f \otimes 1$，$\bar{g} = g \otimes 1$。

证明 只须指出 $\bar{f}$ 是单同态。

事实上，由命题Ⅱ.7.1，知存在同态 $\nu: A \to A'$，使得 $\nu f = 1$(恒同)$: A' \to A'$。于是

$$\begin{aligned}(\bar{\nu} \otimes 1)\, \bar{f} &= (\nu \otimes 1) \cdot (f \otimes 1) \\ &= (\nu f) \otimes 1 = 1 \otimes 1.\end{aligned}$$

故 $\bar{f}$ 是单同态。▌

§2 挠积

定义2.1 设 A 是一个群。群同态叙列

$$0 \longrightarrow A'' \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

称为 A 的一个**表现**，如果它是正合的，且 A' 是自由群。此时对群 B，正合叙列

$$A'' \otimes B \xrightarrow{\bar{f}} A' \otimes B \xrightarrow{\bar{g}} A \otimes B \longrightarrow 0$$

中 $\bar{f}$ 的核 $\ker \bar{f}$，称为 A 与 B 的**挠积**，记为 $\mathrm{Tor}_g(A, B)$。

于是有正合叙列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_g(A, B) \xrightarrow{\bar{i}} A'' \otimes B \xrightarrow{\bar{f}} A' \otimes B \\ \xrightarrow{\bar{g}} A \otimes B \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

其中 $\bar{i}$ 是内射，$\bar{f} = f \otimes 1$，$\bar{g} = g \otimes 1$。

命题2.1 设群A有两个表现，即叙列

$$0\longrightarrow A_1''\xrightarrow{f_1}A_1'\xrightarrow{g_1}A\longrightarrow 0,$$

$$0\longrightarrow A_2''\xrightarrow{f_2}A_2'\xrightarrow{g_2}A\longrightarrow 0.$$

都是正合的，A_1' 与 A_2' 为自由群。则对任意群B，有

$$\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B)\approx\mathrm{Tor}_{g_2}(A,B).$$

证明 在图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1'' & \xrightarrow{f_1} & A_1' & \xrightarrow{g_1} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\psi & & \downarrow\varphi & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A_2'' & \xrightarrow{f_2} & A_2' & \xrightarrow{g_2} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

中，因 A_1' 是自由的，g_2 是满同态，易见有同态 $\varphi:A_1'\to A_2'$，使得 $g_2\varphi=g_1$。

由于 $g_2\varphi f_1=g_1f_1=0$，便有

$$\mathrm{Im}(\varphi f_1)\subset\ker g_2=\mathrm{Im}(f_2).$$

于是据f_2是单同态，存在同态 $\psi:A_1''\to A_2''$，使得 $f_2\psi=\varphi f_1$。

考虑图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\to\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B) & \xrightarrow{\bar{i}_1} & A_1''\otimes B & \xrightarrow{\bar{f}_1} & A_1'\otimes B & \xrightarrow{\bar{g}_1} & A\otimes B & \to 0 \\ \downarrow\bar{\tau} & & \downarrow\bar{\psi} & & \downarrow\bar{\varphi} & & \downarrow\bar{1} & \\ 0\to\mathrm{Tor}_{g_2}(A,B) & \xrightarrow{\bar{i}_2} & A_2''\otimes B & \xrightarrow{\bar{f}_2} & A_2'\otimes B & \xrightarrow{\bar{g}_2} & A\otimes B & \to 0, \end{array}$$

其中$\bar{1}=1\otimes1$，$\bar{\varphi}=\varphi\otimes1$，$\bar{\psi}=\psi\otimes1$，$\bar{i}_1$与$\bar{i}_2$为内射。

由于$\bar{f}_2\ \bar{\psi}\ \bar{i}_1=\bar{\varphi}\ \bar{f}_1\bar{i}_1=0$，命

$$\bar{\tau}=\bar{\psi}\quad\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B):\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B)\to\mathrm{Tor}_{g_2}(A,B).$$

应当指出，$\bar{\tau}$的定义与上述φ及ψ的选取无关。事实上，如有同态$\varphi_1:A_1'\to A_2'$，适合 $g_2\varphi_1=g_1$；同态$\psi:A_1''\to A_2''$，适合 $f_2\psi_1=\varphi_1f_1$。则因 $g_2(\varphi-\varphi_1)=0$ 及 A_1' 是自由的，有同态 $\xi:A_1'$

$\to A_2''$，使得 $f_2\xi=\varphi-\varphi_1$，便有 $\psi-\psi_1=\xi f_1$。于是

$$\begin{aligned}\bar{\psi}-\bar{\psi}_1&=\psi\otimes 1-\psi_1\otimes 1\\&=\xi f_1\otimes 1=\bar{\xi}\bar{f}_1,\end{aligned}$$

$$\bar{\xi}=\xi\otimes 1$$

然而 $\bar{\xi}\ \bar{f}_1\ \bar{i}_1=0$，即

$$\bar{\psi}\,|\,\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B)=\bar{\psi}_1\,|\,\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B).$$

仿照上述办法，利用 A_2' 是自由群，存在同态

$$\bar{\rho}:\mathrm{Tor}_{g_2}(A,\ B)\to\mathrm{Tor}_{g_1}(A,\ B).$$

且易见

$$\bar{\rho}\,\bar{\tau}=1(\text{恒同}):\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B)\to\mathrm{Tor}_{g_1}(A,B),$$
$$\bar{\tau}\,\bar{\rho}=1(\text{恒同}):\mathrm{Tor}_{g_2}(A,B)\to\mathrm{Tor}_{g_2}(A,B).$$

故　$\bar{\tau}\ \mathrm{Tor}_{g_1}(A,B)\approx\mathrm{Tor}_{g_2}(A,B)$. 】

附记　由命题2.1，挠积的定义从同构意义上，只与 A 和 B 有关，而与 A 的表现的选取无关，今后记为 $\mathrm{Tor}(A,B)$。

命题2.2　设 A 或 B 是（有限维）自由群，则

$$\mathrm{Tor}(A,B)=0.$$

证明　若 A 是自由的，利用正合叙列

$$0\longrightarrow 0\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$$

（其中 f 是零同态，g 是恒同同态），即得 $\mathrm{Tor}(A,B)=0$。

若 B 是有限维自由群，并设叙列

$$0\longrightarrow A''\xrightarrow{f}A'\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$$

是 A 的一个表现．可知叙列

$$A''\otimes B\xrightarrow{\bar{f}}A'\otimes B\xrightarrow{\bar{g}}A\otimes B\longrightarrow 0$$

是正合的，$\bar{f}$ 是单同态（由定理1.2）。即

$$\mathrm{Tor}(A,B)=0。 \rrbracket$$

§3　一般系数群的同调群

现在，我们来正式描述以一般交换群G为系数群，有限（单纯）复形K的同调群，以下简记

$C_q(K)=C_q(K,J)$，　　$H_q(K)=H_q(K,J)$，　　……。

定义3.1　设k是有限（单纯）复形，G是交换群。命

$$C_q(K,G)=C_q(K)\otimes G,$$

称为以G为系数群，K的q维链群。

由推论1.3及其附记，$C_q(K,G)$中的q维链即是以G的元素为系数，K的q维有向单形的线性组合。而群$C_q(K,G)$同构于α_q个G的直和，如果K恰有α_q个q维单形。

易见当$q<0$，$C_q(K,G)=0$。

定义边沿运算

$$\bar{\partial}_q=\partial_q\otimes 1:C_q(K,G)\to C_{q-1}(K,G),$$

其中$\partial_q:C_q(K)\to C_{q-1}(K)$是通常边沿同态；$1:G\to G$是恒同同态。

于是因

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_q\cdot\bar{\partial}_{q+1}&=(\partial_q\otimes 1)\cdot(\partial_{q+1}\otimes 1)\\&=(\partial_q\partial_{q+1})\otimes 1=0\end{aligned}$$

知$C(K,G)=\{C_q(K,G),\ \bar{\partial}_q\}$是（非负）链复形，称为以$G$为系数群，$K$的链复形。

命

$$Z_q(K,G)=\ker\bar{\partial}_q\subset C_q(K,G),$$

$$B_q(K,G)=\mathrm{Im}\,\bar{\partial}_{q+1}\subset Z_q(K,G),$$

分别称为以G为系数群，K的q维闭链群，q维边沿链群。而

$$H_q(K,G)=Z_q(K,G)/B_q(K,G)$$

称为以G为系数群，K的q维同调群。

易见

（i）若$\varphi:C_q(K)\to C_q(L)$是链映射，则

$$\varphi\otimes 1:C_q(K,G)\to C_q(L,G)$$

亦是链映射。此时导出同态

$$\varphi_*:H_q(K,G)\to H_q(L,G).$$

（ii）若φ是链等价，则$\varphi\otimes 1$亦然。

§4 万有系数定理

现在我们来叙述并证明**万有系数定理**。

定理4.1 设K是有限（单纯）复形，G为一个交换群。则

$$H_q(K,G)\approx H_q(K)\otimes G\oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(K),G).$$

证明 记

$$i:Z_q(K)\to C_q(K),$$
$$j:B_q(K)\to Z_q(K),$$
$$k:B_q(K)\to C_q(K),$$

均为包含同态，知$k=ij$。于是有同态$\eta:C_q(K)\to B_{q-1}(K)$，使得$\partial=k\eta$。

由于叙列

$$0\longrightarrow Z_q(K)\xrightarrow{i}C_q(K)\xrightarrow{\eta}B_{q-1}(K)\longrightarrow 0$$

是正合的，我们构造一个同态

$$\tau:B_{q-1}(K)\to C_q(K),$$

适合（i）$\eta\tau=1$（恒同）$:B_{q-1}(K)\to B_{q-1}(K)$；

（ii）$C_q(K)=iZ_q(K)\oplus\tau B_{q-1}(K)$。

事实上，$B_{q-1}(K)$作为$C_{q-1}(K)$的子群是自由群（见[1]定理B.3.4)。设$\{b_{q-1}^1,\cdots,b_{q-1}^l\}$是它的基。因$\eta$是满同态，取$c_q^i\in C_q(K)$，使得$\eta c_q^i=b_{q-1}^i$，$1\leqslant i\leqslant l$。这便决定同态$\tau:B_{q-1}(K)$

$\to C_q(K)$。由定义可知性质（i）是明显的。

由命题Ⅱ.7.1，性质（ii）亦成立。

于是，由命题1.6，叙列

$$0\to Z_q(K)\otimes G\xrightarrow{\bar{i}}C_q(K)\otimes G\xrightarrow{\bar{\eta}}B_{q-1}(K)\otimes G\to 0$$

是正合的，$\bar{\eta}=\eta\otimes 1$，$\bar{i}=i\otimes 1$。根据定理1.2

$$\begin{aligned}C_q(K,G)&=C_q(K)\otimes G\\&=(iZ_q(K)\otimes G)\oplus(\tau B_{q-1}(K)\otimes G)\\&=\bar{i}\,(Z_q(K)\otimes G)\oplus\bar{\tau}\,(B_{q-1}(K)\otimes G),\end{aligned}$$

其中 $\bar{i}$，$\bar{\tau}=\tau\otimes 1$ 是单同态。因

$$\bar{\partial}\,\bar{i}\,[Z_q(K)\otimes G]=\bar{k}\,\bar{\eta}\,\bar{i}\,[Z_q(K)\otimes G]=0\quad(\bar{k}=k\otimes 1),$$

知 $\bar{i}\,[Z_q(k)\otimes G]\subset Z_q(K,G)$。

注意叙列

$$0\longrightarrow B_{q-1}(K)\xrightarrow{j}Z_{q-1}(K)\xrightarrow{g}H_{q-1}(K)\longrightarrow 0$$

是 $H_{q-1}(K)$ 的一个表现，其中 g 是自然投射。对于 $x\in B_{q-1}(K)\otimes G$，有

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\,\bar{\tau}\,(x)&=(\partial\otimes 1)\cdot(\tau\otimes 1)(x)\\&=(\partial\tau\otimes 1)(x)=(k\otimes 1)(x)\\&=\bar{i}\,\bar{j}\,(x)\qquad(\bar{j}=j\otimes 1).\end{aligned}$$

因 $\bar{i}$ 是单同态，根据定义2.1，知 $\bar{\tau}(x)\in Z_q(K,G)$，当且仅当

$$x\in\ker\bar{j}=\mathrm{Tor}(H_{q-1}(K),G).$$

于是

$$Z_q(K,G)=\bar{i}\,[Z_q(K)\otimes G]\oplus\bar{\tau}\,[\mathrm{Tor}(H_{q-1}(K),G)]$$

及

$$B_q(K,\ G)=\bar{\partial}[C_{q+1}(K)\otimes G]=\bar{k}\,\bar{\eta}\,[C_{q+1}(K)\otimes G]$$

$$=\bar{k}(B_q(K)\otimes G)=\bar{i}\,\bar{j}(B_q(K)\otimes G).$$

因此

$$H_q(K,G)\approx\frac{Z_q(K)\otimes G}{\bar{j}(B_q(K)\otimes G)}\oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(K),G)$$

$$\approx\frac{Z_q(K)}{j(B_q(K))}\otimes G\oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(K),G)$$

(见推论1.5)

$$\approx H_q(K)\otimes G\oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(K),G).$$]

附记 运用张量积与挠积的对偶乘积运算（同态群、扩张群），可以得到关于复形上同调群的万有系数定理，不再赘述。

参考书目及部分文献目录

参考书目:

[1] 江泽涵，拓扑学引论，上海科学技术出版社，1978。

[2] P•J• 希尔顿著，刘华译，同伦论，科学出版社，1960。

[3] Eilenberg, S., and Steenrod, N. E., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952.

[4] Hu, S.-T. (胡世桢), Homotopy theory, Academic Press, 1959.

[5] Spanier, E.H., Algebraic topology, McGraw-Hill Book Company, 1966.

[6] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

[7] Switzer, R. M., Algebraic topology——homotopy and homology, Spinger-Verlag, 1975.

部分文献目录

本书正文中曾经提到下面的一些文献，目的仅为方便读者，并非要表明同伦论历史上重要的进展过程，我们在本书序言中也已作过说明。

[8] Adams, J.F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Annals of Math.*, **72** (1960), 20—104.

[9] Blakers, A. L., Some relations between homology and homotopy groups, *Annals of Math.*, **49** (1948), 428—461.

[10] ——and Massey, W.S., The homotopy groups of a

triad Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ., *Annals of Math.*, **53**(1951), 161—205, **55**(1952), 192—201, **58**(1953), 409—417.

[11] —— and ——, Products in homotopy theory, *Annals of Math.*, **58**(1953), 295—324.

[12] Eilenberg, S., Cohomlogy and Continuous mappings, *Annals of Math.*, **41**(1940), 231—251.

[13] ——, Singular homology theory, *Annals of Math.*, **45**(1944), 407—447.

[14] ——and Maclane, S., Acyclic models, *Amer. J. Math.*, **75**(1953), 189—199.

[15] Freudenthal, H., Über die klassen der Sphärenabbildungen I., *Compositio Math.*, **5**(1937), 299—314.

[16] Gysin, W., Zur Homologie Theorie des Abbildungen und Faserungen von Monnigfaltigkeiten, *Comment Math. Hel.*, **14**(1941), 61—121.

[17] Hopf, H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.*, **104**(1931), 637—665.

[18] ——, Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen polyeder auf die n-dimensionalen Sphäre, *Comment Math. Helv.*, **5**(1933), 39—54.

[19] ——, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären neidrigerer Dimension, Fund. Math., **25**(1935), 427—440.

[20] Hu, S.-T.(胡世桢), Inverse homomorphisms of the homtopy sequence, *Indagationes Math.*, **9**(1947), 169—177.

[21] ——, An exposition of relative homotopy theory,

Duke Math. J., **14** (1947), 991—1033.

[22] ——, The homotopy addition theorem, *Annals of Math.*, **58** (1953), 108—122.

[23] Hurewicz, W., Beiträge zur Topologie der Deformationen I—IV, *Proc. Akad. Wetenseh., Amsterdan*, **38** (1935), 112—119, 521—528, **39** (1936), 117—126, 215—224.

[24] ——, On the concept of fiber space, *Proc. Acad. Sci. U.S.A.*, **41** (1955), 956—961.

[25] Massey, W.S., Exact couples in algebraic topology I—V. *Annals of Math.*, **56** (1952), 363—396, **57** (1953), 248—286.

[26] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés, *Annals of Math.*, **54** (1951), 425—505.

[27] Wang, H.-C(王宪钟), Some examples concerning the relations between homology and homotogy groups, *Indagationes Math.*, **9** (1947), 384—386.

[28] ——, The homolgy groups of the fibre bundles over a sphere, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 33—38.

[29] Whitehead, G. W., A generalization of the Hopf invariant, *Annals of Math.*, **51** (1950), 192—237.

[30] Whitehead, J.H.C., On adding relation to homotopy groups, *Annals of Math.*, **42** (1941), 409—428.

[31] ——, Combinatorial homotopy I, II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 213—245, 453—496.

[32] ——, Note on suspension, *Quart. J. Math.*, **2** (1950), 9—22.

[33] Whitney, H., The maps of an n-complex into an n-sphere, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 51—55.

索　引

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

[General Information]
书名=同伦论基础
作者=廖山涛　刘旺金著
页数=280
SS号=10827407
DX号=
出版日期=1980年12月第1版
出版社=北京大学出版社

附录页